NUPEM
Nucleo de Pesquisa Multidisciplinar
10 anos promovendo e divulgando o conhecimento científico.
IV EPCT
Encontro de Produção Científica e Tecnológica
20 a 23 de outubro de 2009

DEMOSNTRAÇÕES MATEMÁTICAS E ASPECTOS HISTÓRICOS DA LÓGICA MATEMÁTICA: SIGNIFICADOS E RELEVÂNCIAS

Nicanor Felix dos Santos TCC, Matemática, Fecilcam, npastor@zipmail.com.br
Veridiana Rezende[1] (OR), Fecilcam, rezendeveridiana@gmail.com

1. Introdução

Este trabalho consiste dos resultados parciais de uma pesquisa que se encontra em andamento referente ao Trabalho de Conclusão de Curso – TCC do primeiro autor sobre orientação da autora supracitada. O objetivo principal da pesquisa (para o TCC) que estamos desenvolvendo é estudar dois tipos distintos da construção dos Números Reais existentes na literatura, a saber, a construção dos Reais elaborada por Cantor e por Dedekind. Pretendemos fazer uma breve pesquisa na História da Matemática de como aconteceram estes dois modos da construção dos números reais.

Porém, como já esperávamos, no decorrer deste estudo surgiram diversos conceitos e resultados matemáticos tais como teoremas, corolários, proposições, postulados, axiomas, diferentes tipos de demonstrações para os resultados matemáticos, entre outros conceitos.

Com a intenção de melhor compreender cada um destes conceitos, a importância das demonstrações em Matemática, da Lógica Matemática, bem como investigar seus aspectos históricos realizamos uma pesquisa que é apresentada neste trabalho.

2. Aspectos Históricos da Lógica Matemática, a Importância e Significados das Demonstrações Matemáticas

O conhecimento matemático, principalmente o numérico, é importante para o avanço de praticamente todas as áreas do saber humano, além de contribuir para a formação de um cidadão cônscio, responsável e crítico, visto que “A Matemática faz muito bem a passagem da realidade para a abstração do conhecimento, além de fornecer instrumentos que possibilitam interpretar um acontecimento de maneira sistematizada e quantificada (SOUZA; SPINELLI, 2001, p.6). Por exemplo, a partir do momento em que o homem aprendeu a contar, pôde controlar a produção de cereais, elaborar calendários, quantificar seres inanimados e vivos; e, de posse dos processos de medições tornou – se capaz de compreender as formas geométricas presentes na natureza, bem como desenvolver processos de comparações (medições) entre grandezas, possibilitando – o a descobrir propriedades intrínsecas da constituição do Universo.

Num nível mais avançado, o saber matemático proporciona meios para se compreender a dinâmica do mundo subatômico, atômico, molecular e planetário, por meio das leis que regem os movimentos das partículas, moléculas e dos astros; decifrar os arcanos do desenvolvimento e evolução dos fenômenos naturais, bem como auxiliar na produção de equipamentos para o aprimoramento da pesquisa básica; propiciar tomadas de decisões de forma estratégica e eficiente; automatizar os meios de produção em séries; desenvolver tecnologia de ponta; e, projetar sistemas dotados de inteligência artificial. No entanto, é evidente que para esse conhecimento ser aceito pela comunidade científica ele necessita ser demonstrado, fundamentado num sistema lógico e estruturado, sob a ótica da própria natureza matemática. Cabe ressaltar, que demonstrar ou fazer uma demonstração em Matemática significa utilizar-se de uma “Seqüência de argumentos lógicos que partem de fatos conhecidos e provam que outro fato é verdadeiro (IMENES; LELLIS, 2007, p. 301).

Ratificamos que as demonstrações matemáticas surgem devido a necessidade dos matemáticos em tornarem os enunciados matemáticos verdadeiros e convincentes. É notável que o estudo das demonstrações em Matemática requer um domínio pleno dos raciocínios – lógicos, ou seja, um conhecimento aprimorado das premissas da Lógica que são usados para demonstrar e/ou validar um conceito matemático.

Notamos em textos da literatura, como por exemplo, em Silva (2002) e Keller e Bastos (2005) referente às demonstrações matemáticas e/ou Lógica, que as provas da validade de resultados matemáticos se fundamentam nas premissas da Lógica Matemática, pois esta é a ciência que perscruta as leis que concatenam o raciocínio lógico – matemático e envida o máximo para explicar de forma consistente os resultados matemáticos. Por outro lado, a Lógica Simbólica (Matemática) também busca a estatuir uma simbologia e/ou uma linguagem universal e peculiar inerentes à natureza do fazer matemático. Pois,

> [...] sendo preocupação da lógica o conceito como entidade abstrata, universal e unívoca, por um lado, e a linguagem natural tida como uma fonte de equívocos, na medida em que línguas diferentes possuem termos diferentes para expressá – los, e, mesmo, uma mesma língua se utiliza de vários termos para expressar uma idéia ou conceito, ou ainda, um mesmo termo com sentidos conceituais diferentes, a lógica matemática nasce da tentativa de elaborar uma linguagem “científica” universal que elimine os erros ou falácias que podem ocorrer a partir da linguagem natural na construção do discurso científico (KELLER; BASTOS, 2005, p.111).

Diante disso, salientamos que a Lógica possibilita conhecer as formas do raciocínio matemático abstrato, visto que este “[...] é de fundamental importância para aprender Matemática e para empregar resultados matemáticos em aplicações nas mais diversas áreas científicas e tecnológicas” (PALIS; MALTA, 1998, p.1).

A Lógica tem sua origem em tempos remotos quando o conhecimento matemático na antiguidade ainda era incipiente desprovido de qualquer rigor lógico. Em outras palavras, quando as conjecturas matemáticas não eram demonstradas mediante um sistema lógico bem fundamentado com as premissas da Lógica Simbólica. É possível detectar três formas de lógica: ***a forma clássica antiga*** – que predominou entre os séculos IV a.C até o século I d.C, destacando três escolas: a dialética sofística, a lógica aristotélica e a lógica megárico – estóica. Para esta forma, as proposições lógicas são estabelecidas por meio de palavras da linguagem comum e sua base é o pensamento como aquele encontrado na linguagem natural, o qual possibilita as leis e as regras formais; ***forma escolástica ou medieval*** – desenvolvida entre os séculos XI e XV; e, a ***forma matemática*** – que se inicia no século XVII com o intuito de estatuir uma simbologia linguística específica e sem contradições, de modo a permitir a elaboração de um sistema que domine as formas corretas do raciocínio e que seja aplicável a todos os domínios do pensamento (KELLER; BASTOS, 2005).

Convém ressaltarmos que a ***forma matemática*** se desenvolveu devido ao avanço científico acelerado do século XVII, no qual os pesquisadores passaram a investigar campos mais complexos do conhecimento matemático. Isso ocorreu também porque o desenvolvimento de muitas teorias da construção de novos saberes matemáticos exigiam uma elucidação matemática mais aprimorada, tais como as relacionadas ao cálculo que necessitava de uma fundamentação lógica, além de “raciocínios heurísticos – geométricos” para explicar diversos resultados com aspectos paradoxais (DOMINGUES, 2002, p. 62).

A fundamentação da Matemática embora seja uma tarefa complexa, é estabelecida juntamente com a própria evolução da matemática, pois “convém notar que todo esse desenvolvimento mais recente da Matemática, sobretudo nos séculos XVII e XVIII, se deu graças à atitude dos matemáticos, que não se deixaram vencer pelas dificuldades naturais da falta de uma teoria dos fundamentos” (ÁVILA, 2006, p.54).

A fundamentação de muitos conceitos matemáticos só ocorreu recentemente, pois as premissas da lógica no mundo científico antes do séc. XVII, ou até mesmo nos limiares do século XIX não eram suficiente para explicar a complexidade e a necessidade de rigor que as teorias matemáticas exigiam.

Mediante a necessidade do rigor que a elaboração e construção dos conceitos mais abstratos da Matemática passaram a demandar, muitos matemáticos procuraram estudar as demonstrações matemáticas sob a ótica da Lógica Simbólica, uma vez que

> [...] no final do século XIX, a demonstração em matemática tinha um caráter grandemente material. A demonstração de uma proposição era uma atividade intelectual que visava nos convencer e a convencer os outros,

> racional, mas também psicologicamente, da veracidade dessa proposição. A partir de algum momento, porém, tornou – se necessário submeter a noção de demonstração a uma análise mais profunda, com vistas a reduzir o recurso ao uso da evidência intuitiva (DOMINGUES, 2002, p.62).

É possível afirmarmos que após o seu extenso desenvolvimento a Lógica pode ser considerada como uma ciência relevante, que por meio da aplicação dos seus ditames a outras ciências possibilita aos estudiosos desvendar saberes obscuros e a se aventurar do saber Universal, pois "[...] a lógica é a disciplina que trata das formas de pensamento, da linguagem descritiva do pensamento, das leis de argumentação e raciocínios corretos, dos métodos e dos princípios que regem o pensamento humano" (KELLER; BASTOS, 2005, p.15).

Do ponto de vista da Lógica, as demonstrações matemáticas apresentam os seguintes aspectos:

> [...] lógico – epistemológico – que as mostra como objetos lógicos ideais, árvores ou seqüências ordenadas no espaço lógico, segundo relações de dependência, ou conseqüência, lógica. [...] retórico o aspecto das demonstrações, segundo o qual, elas aparecem como portadoras de força coercitiva de aquiescência às teses demonstradas. Demonstrações podem ter também uma função heurística. Isto é, elas podem ser indutoras de descoberta matemática (SILVA, 2002, p. 69).

Cabe ressaltar que

> [...] uma demonstração não é uma demonstração propriamente dita, do aspecto lógico – epistemológico; se não for logicamente impecável, ela pode desempenhar sua função retórica, mesmo se for logicamente falha, mas não tem certamente, ou assim, parece, nenhum papel heurístico, a menos que seja logicamente imperfeita (SILVA, 2002, p. 70)

Desta forma, não podemos exigir que uma mesma demonstração tenha todas essas características. Não obstante, é possível conciliar os três aspectos acima descritos, visto que

> [...] uma demonstração correta do ponto de vista lógico pode constituir – se em desafio epistemológico se sua força racionalmente coercitiva puder induzir, talvez como uma reação de insubmissão do sujeito, a uma "revolta" da imaginação subjetiva, que se disporia a encontrar variantes interessantes das noções envolvidas nessa demonstração que pudesse produzir contra – exemplos da tese demonstrada (SILVA, 2002, p. 70).

Ratificamos que o aspecto lógico das demonstrações matemáticas podem ser investigadas matematicamente, pois "[...] podemos considerar demonstrações, para efeito de uma teoria matemática, como seqüências, ou árvores, de formas declarativas (formas de enunciados) relacionadas entre si por conseqüência lógica” (SILVA, 2002, p. 74).

Contudo os aspectos heurísticos e retóricos não podem ser tratados matematicamente, visto que “[...] o aspecto heurístico das demonstrações não é, a rigor, um aspecto das demonstrações, se entendermos por isso algo intrínseco a elas”. E, que as demonstrações “[...] só desempenha sua função heurística se move o sujeito a reagir a ela, aceitando seu desafio (SILVA, 2002, p. 74). Por outro lado, o aspecto retórico ocorre quando uma demonstração convence alguém da sua validade (SILVA, 2002, p.75).

Evidenciamos que as demonstrações matemáticas têm por base o sistema axiomático que para Ávila (2006) deve

> [...] ser consistente, quer dizer, os postulados não podem contradizer uns aos outros, por si mesmos ou por suas conseqüências; deve ser completo, no sentido de serem suficientes para provar verdadeiras ou falsas todas as proposições formuladas no contexto da teoria em questão; e, por fim, cada postulado dever ser independente dos demais, no sentido de que não é conseqüência deles, sob pena de ser supérfluo (p.70).

Ao estudarmos qualquer ramo da Matemática nos deparamos com objetos matemáticos[1], símbolos e conceitos tais como axiomas, postulados, proposições, funções proposicionais, teoremas, corolários, lema, diferentes tipos de demonstrações e enunciados de resultados matemáticos, entre outros. Com a intenção de esclarecer, exemplificar e detalhar estes conceitos discorreremos a seguir cada um deles.

2.1. Definições e Exemplificações de Conceitos Utilizados nas Demonstrações Matemáticas

2.1.1. Proposições e Funções Proposicionais

Segundo Domingues (2002) as noções de “verdadeiro” e “falso” que os matemáticos usam para validar um resultado matemático estão associadas a proposições. Assim, podemos definir proposição como “sentenças declarativas às quais se pode atribuir um valor lógico – verdadeiro ou falso, exclusivamente” (DOMINGUES, 2003, p.17).

Exemplo: O número $\sqrt{3}$ é irracional. Essa sentença é uma proposição, pois podemos lhe atribuir um valor lógico. Neste caso, a proposição é verdadeira.

---

[1] Um objeto matemático é um número, uma expressão algébrica, uma função, uma figura geométrica, etc. (LA ROQUE & MALTA, 1998, p.2).

As sentenças declarativas serão funções proposicionais se em suas afirmações conter variáveis (DOMINGUES, 2003, p.17). Por exemplo: Seja x $\in$ R. Então, podemos ter a seguinte função proposicional: *“x é um número real maior que 3”.*

De fato, essa sentença é uma função proposicional, pois não lhe podemos atribuir um valor lógico específico, já que ela está relacionada com uma variável real.

Em conformidade com Palis e Malta (1998), podemos dizer que existem diversas formas proposicionais. Entre elas citamos: proposições do tipo se A, então B; proposições do forma A se, e somente se, B.

No caso das proposições se A, então B, a proposição (frase) A é denominada hipótese e B de tese. Sentenças declarativas como essas são verdadeiras quando for possível tanto a hipótese quanto a tese serem verificadas em todas as situações a que se destinam, sendo falsa se a hipótese se verifica e a tese não, ou seja, uma proposição deste tipo é falsa quando há um ente[2] matemático que satisfaz a hipótese A, mas não a tese B. Neste caso, é necessário exibir apenas um contra – exemplo que garante a falsidade da proposição. No entanto, um objeto matemático que satisfaça tanto a hipótese quanto a tese é apenas um exemplo para a proposição supracitada (PALIS; MALTA, (1998), KELLER; BASTOS (2005).

É mister destacarmos “enquanto um só contra – exemplo permite concluir que um enunciado é falso, não basta exibir exemplos para mostrar que uma proposição seja verdadeira” (PALIS; MALTA, 1998, p.3). Vejamos um exemplo:

Exemplo: *“Se n é um inteiro positivo, então* $n^2 + n + 41$ *é um número primo”.*

Demonstração: É fácil verificar que essa proposição é verdadeira para n = 1, n = 2, n = 3, ..., até n = 39. Porém, para n = 40, obtemos:

$$40^2 + 40 + 41 = 40 \cdot (40 + 1) + 41 = 40 \cdot 41 + 41 = 41 \cdot (40 + 1) = 41 \cdot 41$$

que é número primo e portanto a proposição é falsa.

Em relação às proposições da forma A se, e somente se, B são verdadeiras quando “Se A, então B e se B, então A são ambas verdadeiras. Caso contrário é falsa (PALIS; MALTA, 1998, p.2). Em outras palavras, sentenças lógicas como essas são verdadeira se A e B são ao mesmo tempo condições suficientes e necessárias uma da outra.

[2] Nesta pesquisa os termos entes, elementos e objetos matemáticos têm o mesmo significado.

2.1.2. Axiomas, Postulados e Teoremas

Em conformidade com Ávila (2006) ratificamos que postulado e axiomas são proposições evidentes por si só. Em outras palavras, podemos dizer que são conceitos primitivos e/ou intuitivos aceitos sem necessidade de prova.

De acordo com Ávila (2006) podemos dizer que teoremas são proposições verdadeiras da forma “P implica Q”, sendo P e Q também são proposições.

Exemplo: Sejam *P* e *Q* as seguintes proposições:

- ***P:*** n é um número que possui somente dois divisores.
- ***Q*:** n é um número primo.

Essas proposições formam um teorema, cujo enunciado pode ser: “ Todo número n que possui dois divisores é primo”.

Convém ressaltarmos que num teorema escrito na forma $P \Rightarrow Q$, P é a condição suficiente de Q, ou seja, basta a hipótese P ter valor lógico verdadeiro para que a tese Q também tenha. Por outro lado, a tese Q é condição necessária da hipótese P; quer dizer se P for verdadeiro, a tese Q deverá ser necessariamente verdadeira. Quando a recíproca de um teorema for verdadeira, as proposições P e Q passam a serem condições necessárias e suficientes para a validade da outra (ÁVILA, 2006, p.6).

Exemplo: A equivalência “*x* é par $\Leftrightarrow$ x^2 é par”, sendo *x* um número inteiro, pode ser formulada da seguinte forma: “uma condição necessária e suficiente para que x^2 seja par é que *x* seja par” (DOMINGUES, 2003, p.17).

2.1.3. Corolário e Lema

De acordo com Ávila (2006) ratificamos que corolário é um teorema que é conseqüência imediata de outro, por isso, é comum encontrarmos após um teorema um ou mais corolários.

O lema é um teorema que pretende subsidiar ou preparar a demonstração de outro teorema, e por isso, muitas vezes antes do enunciado de um teorema nos deparamos com um lema.

3. Princípios Clássicos da Lógica Matemática

3.1. Princípio de Não – Contradição

De acordo com Keller e Bastos (2005), destacamos que esse princípio aplicado à Lógica Matemática nos diz que uma proposição **P(n)** não pode ser verdadeira ou falsa simultaneamente.

3.1.1. Princípio do Terceiro Termo Excluído

Devido a esses princípios da Lógica, podemos averiguar que esta é “essencialmente binária”, ou seja, que uma proposição **P(n)** só pode assumir dois valores lógicos: verdadeiro ou falso (KELLER e BASTOS, 2005).

Para Keller e Bastos (2005), uma das falibilidade da “lógica formal é que seu raciocínio dedutivo opera com no máximo três proposições de cada vez, [...]”. Por outro lado, afirmam que a lógica matemática permiti usar “ n... proposições em seus cálculos” (p.113). Sendo assim, o raciocínio dedutivo utilizado na Matemática nos possibilita lidarmos com interações sucessivas, raciocinando, por exemplo, fazendo uso do método de indução matemática.

4. Modalidades de Demonstrações Matemáticas

4.1. Demonstração Direta e por meio de Argumentos Lógicos

Demonstração direta é aquela pelo qual se verifica a tese para todos os casos em que a hipótese de uma proposição **P(n)** seja verdadeira. Quando se verifica a veracidade de uma tese para todas as situações em que se validam a hipótese, por meio de argumentos encadeados logicamente, temos a chamada demonstração por argumentos lógicos (PALIS; MALTA, 1998, p.5).

4.2. Demonstração por Indução

A demonstração por indução é um recurso muito utilizado para demonstrar uma série de proposições e teoremas. Ela consiste em verificar, primeiramente, se uma determinada proposição **P(n)** é válida para **n = 1**, onde **n** $\in \mathbb{N}$, em seguida, para **n = k** e depois averiguá – la para **n = k +1**. Se essas seqüências de raciocínios se verificar, então, a veracidade da proposição **P(n)** fica comprovada. O princípio da indução é definido (ÁVILA, 2006, p.13) como:

Princípio de indução matemática. Seja *r* um número natural, e P(n) uma propriedade referente ao número natural $n \geq r$. Suponhamos que:

a) P(*r*) é verdadeira;

b) P (*k*) $\Rightarrow$ P(*k + 1*) para todo número natural $k \geq r$.

Então P(*n*) é verdadeira, qualquer que seja $n \geq r$.

Em conformidade com Ávila (2006) podemos dizer que esse princípio é conhecido como a propriedade fundamental dos números naturais, e, que ele, só é possível de ser aplicado, se for provado as duas proposições P(*r*) e P (*k*) $\Rightarrow$ P(*k + 1*) separadamente, $\forall\ k \geq r$.

Exemplo: Prove por indução que 1+ 3 + 5 + 7 +... + (2n – 1) = n^2, n = 1,2,3, ...

Demonstração: Temos que:

- Para n = 1 $\Rightarrow$ 1 = 1^2 = 1.
- Para n = k $\Rightarrow$ 1 + 3 +5 + 7 + ... + (2k – 1) = k^2 (I).

Assim, se adicionarmos k +1 em ambos os membros de (I), obtemos:

1 + 3 +5 + 7 + ... + (2k – 1) + k + 1 = k^2 + k +1 (II).

Observe que o lado direito da igualdade (II) é igual a $(k+1)^2$, portanto concluímos que se P(k) é verdadeira, então P(K+1) também o é, ou seja, P(*k*) $\Rightarrow$ P(*k + 1*) para todo número natural $k \geq r$.

4.3. Demonstração por Redução ao Absurdo

Esta é uma modalidade de prova matemática que a partir da negação da tese de um teorema, chega – se a uma contradição das conjecturas explícitas na hipótese deste. De acordo com (ÁVILA, 2006, p.8) se quisermos mostrar que A $\Rightarrow$ B, é necessário começar supondo A verdadeira e B falsa, sendo que B é denominada de hipótese de redução ao absurdo, pois é uma suposição temporária, até que se segue a uma contradição ou um absurdo. Se assim for, rejeita – se a hipótese do raciocínio por absurdo, concluindo que B é verdadeira.

Exemplo: Demonstre que se m^2 é ímpar, então m também ímpar (m é número inteiro).

Demonstração: Inicialmente, começamos negando a tese. Suponhamos por absurdo que m seja par. Assim, podemos escrever:

m = 2t, onde t é número inteiro.

Logo, $m^2 = (2t)^2$, ou seja, $m^2 = 4t^2 = 2 \cdot (2t^2)$ também seria par, o que é um absurdo, pois supomos que m é par. Portanto, concluímos que m é um número ímpar.

4.4. Demonstração de Existência

Dentre os teoremas da Matemática é comum nos deparamos com os chamados teoremas de existência, cuja demonstração fica estabelecida se conseguirmos exibir um elemento ou ente matemático que satisfaça as condições requeridas por ele.

Exemplo: Mostre que dados dois números racionais, a e b, com a < b, existirá um número irracional α tal que a < α < b.

Demonstração: Note que o elemento matemático $\alpha = a + \frac{b-a}{\sqrt{2}}$ (I) satisfaz as condições requeridas. Salientamos primeiro que, pelo modo como o definimos, o número α é maior que *a* e menor que *b*. De (I) obtemos:

$$\sqrt{2} = \frac{b-a}{\alpha - a}.$$

Desta forma, se α fosse racional, o segundo membro da última igualdade também seria um número racional e teríamos o seguinte absurdo: $\sqrt{2}$ é racional. Assim, concluímos que α é irracional.

4.5. Demonstração por Contra – Exemplo

É uma forma de demonstração utilizada em Matemática, cujo intuito é provar uma conjectura, se possível, explicitando um elemento matemático que faz com que ela não se verifique.

Exemplo: Considere a proposição: “Se a é um divisor de b + c, então *a* é um divisor de b e c.”

Demonstração: É evidente que 6 é divisor de 3 + 9. Porém, não é divisor de nenhuma das parcelas da adição 3 + 9.

4.6. Demonstração por Artifício

São usadas quando necessitamos de algum artifício matemático para validar um resultado matemático. Essa modalidade de demonstração é muita usada para demonstrar certos teoremas envolvendo limites, séries e seqüências na disciplina de Cálculo e Análise

Matemática, identidade trigonométricas, etc. Esse tipo de demonstração exige uma boa experiência matemática e muita persistência, pois nem sempre conseguimos 'ver' qual artifício nos possibilita argumentar e convencer logicamente sobre o que nos propomos mostrar.

4.7. Demonstração Usando a Geometria

Demonstramos geometricamente um resultado matemático, quando fazemos uso de figuras e/ou argumentos geométricos para provar um teorema. Esse tipo de demonstração é utilizado, por exemplo, para provar que $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$; o teorema de Pitágoras, a fórmula de Bhaskara, a existência de números irracionais, entre outros conceitos matemáticos.

Também é usado para elucidar conceitos mais complexos e abstratos, tais como as proporções num retângulo áureo (ÁVILA, 2006, p. 49).

5. Considerações Finais

Esta pesquisa sobre demonstrações matemáticas, tem nos possibilitado compreender como estas são estudadas sob o ponto de vista da Lógica, bem como aprimorar nosso saber sobre objetos matemáticos inerentes ao desenvolvimento das teorias que elucidam e tornam consistentes os conceitos abstratos da Matemática.

Observamos que há diversos tipos de resultados matemáticos, várias maneiras de enunciar os teoremas, bem como diversas formas de se realizar as provas desses resultados. A forma a ser utilizada dependerá dos entes matemáticos que se deseja validar. Desta forma, cabe ao matemático e os estudantes das ciências exatas perscrutar como realizar uma demonstração de modo convincente, lógico e heurístico.

Assim, ratificamos que esse estudo nos permitirá analisar a natureza da Matemática, por meio de ditames inerentes a construção do saber matemático, indispensável para a evolução e concatenação das ciências exatas, engenharias e suas tecnologias.

6. Referências

ÁVILA, Geraldo. **Análise Matemática para licenciatura.** 3ª edição revista e ampliada, 1ª reimpressão (2008), Editora Edgard Blücher, São Paulo – SP, 2006.

DOMINGUES, Hygino H.; IEZZI. **A Demonstração ao Longo dos Séculos**. Bolema, Ano 15, nº 18, pp. 55 a 67, 2002.

DOMINGUES, Hygino H.; IEZZI, Gelson. **Álgebra Moderna**. 4ª edição reformulada, Atual Editora, São Paulo - SP, 2003.

IMENES, Luiz Márcio; LELLIS, Marcelo Cestari. **Matemática para todos**. 2ª Edição ,Editora Scipione, São Paulo – SP, 2007.

KELLER, Vicente; BASTOS, Cleverson L. **Aprendendo Lógica**. 14ª edição, Editora Vozes, Petrópolis – RJ, 2005.

PASQUINI, Regina Célia Guapo. **Um Tratamento para os Números Reais via Medição de Segmentos: uma proposta, uma investigação**. 2007 (Doutorado em Educação Matemática), Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro.

SILVA, Jairo José da. **Demonstração Matemática da Perspectiva da Lógica Matemática**. Bolema, Ano 15, nº 18, pp. 68 a 78, 2002.

ROQUE, Gilda de La; MALTA, Iaci. **Somos Todos Mentirosos?** RPM 37, 1998.

SOUZA, Maria Helena; SPINELLI, Walter. **Matemática**. 1ª Edição – 3ª Impressão, Editora Ática, 5ª à 8ª séries, São Paulo – SP, 2001.