



## GEOMETRIA DO TÁXI: A MENOR DISTÂNCIA ENTE DOIS PONTOS NEM SEMPRE É COMO PENSAMOS

FUZZO, Regis Alessandro, IC, Fundação Araucária, Matemática, Fecilcam, [regisfuzzo@gmail.com](mailto:regisfuzzo@gmail.com)  
REZENDE, Veridiana (OR), TIDE, Fecilcam, [rezendeveridiana@gmail.com](mailto:rezendeveridiana@gmail.com)  
SANTOS, Talita Secorun dos (CO-OR), TIDE, Fecilcam, [tsecorun@hotmail.com](mailto:tsecorun@hotmail.com)

### INTRODUÇÃO

Este trabalho visa divulgar a Geometria do Táxi em meio acadêmico e científico, pelo fato de ser uma geometria ‘um pouco diferente’ daquela que estamos adaptados, a Geometria Euclidiana. A ideia de estudar a Geometria do Táxi se deve ao fato dela ser mais adequada para descrever a distância entre dois pontos de uma cidade do que Geometria Euclidiana.

Observando o fato de que nas aulas de matemática há sempre um questionamento por parte do aluno sobre a aplicabilidade e utilização dos conteúdos em sua vida cotidiana, vemos que a Geometria do Táxi vem ao encontro dessa reflexão, dando ao aluno uma perspectiva mais favorável à disciplina de matemática e ao aprendizado da mesma, permitindo fazer conexões com o mundo em que vive, além de contextualizar o conteúdo.

Para lidar com a geografia urbana, um modelo conveniente é a chamada ‘geometria do táxi’, assim denominada porque as distâncias percorridas por um táxi aproximam-se muito mais destas do que das distâncias euclidianas, já que o táxi não é um passarinho, tendo que obedecer ao traçado das ruas (Wanderley *et al*, 2002, p. 24).

Segundo Tesson (1998), ele nos propõe a refletir sobre o porquê de querer mudar de repente a definição de distância atentando pelo fato que a Geometria Euclidiana tem feito muito bem nos últimos 2000 anos. Para isso nos indica algumas respostas possíveis a este questionamento. Para ele, o mais óbvio é sugerido pelo nome desta geometria, a chamada Geometria do Táxi. Conforme este autor, a Geometria Euclidiana mede distâncias “em linha reta”, mas isto raramente constitui um bom modelo para situações da vida real, especialmente nas cidades, no qual as pessoas se preocupam apenas com a distância que seu carro vai precisar para viajar.

E ainda afirma que como uma aplicação menos importante, a distância do táxi é o modelo certo de distância para alguns jogos realizados em uma malha quadrada e no qual



somente são permitidos movimentos horizontais e verticais. Outra razão muito boa para o estudo da Geometria do Táxi está no fato que ela é uma simples Geometria Não-euclidiana.

Tesson (1998) nos diz ainda que, a Geometria do Táxi tem a vantagem de ser bastante intuitiva, em comparação com algumas outras Geometrias Não-euclidianas, e que exige menos fundamento de matemática. É por isso que a métrica de Manhattan (métrica do táxi) também pode dar origem a todos os tipos de diversão em matemática para uma melhor aceitação dos alunos.

Atento a isso, as Diretrizes Curriculares da Educação Básica Matemática do Estado do Paraná (DCE) traz o conteúdo estruturante geometrias se desdobrando em quatro conteúdos específicos entre eles noções básicas de Geometrias Não-euclidianas. Mas o que acontecesse é que muitos professores desconhecem sobre a existência da Geometria do Táxi, desse modo vemos a importância do estudo desta geometria no contexto escolar.

## **METODOLOGIA**

A fundamentação teórico-metodológica das atividades desenvolvidas é baseada em pesquisas bibliográficas. Além disso, também se utilizou da Transposição Didática.

As geometrias Não-euclidianas são desde meados do século XIX conhecidas em meios acadêmicos como um saber científico.

O saber científico está associado à vida acadêmica, embora nem toda produção acadêmica represente um saber científico. Trata-se de um saber criado nas universidades e nos institutos de pesquisas, mas que não está necessariamente vinculado ao ensino básico. Sua natureza é diferente do saber escolar. Podemos destacar a existência de uma diferença entre a linguagem empregada no texto científico e escolar (PAIS, 2002, p.21).

Mas estamos agora passando por um período denominado transposição dos saberes, em que um saber tido como científico é transformado em um saber escolar. O conjunto de transformações adaptativas do saber científico em saber a ser ensinado é o que chamamos de transposição didática.

Um conteúdo do conhecimento, tendo sido designado como saber a ensinar, sofre então um conjunto de transformações adaptativas que vão torná-lo apto a tomar lugar entre os objetos de ensino. O trabalho que, de um objeto de saber a ensinar faz um objeto de ensino, é chamado de transposição didática (CHEVALLARD apud PAIS, 2002, p. 19).

Ao introduzirmos o estudo da Geometria do Táxi na sala de aula, os alunos têm, por meio dele, a oportunidade e a capacidade de investigar tópicos da Matemática Tradicional



por uma nova perspectiva, de fazerem conexões tanto dentro da própria Matemática com o mundo a sua volta como de explorarem a Matemática por caminhos não-analíticos.

A geometria do táxi, desta forma, vem ao encontro das necessidades requeridas para as mudanças no ensino da Matemática, pois, permite desenvolver os seus conteúdos relacionando-os o ambiente que cerca o indivíduo, possibilitando o surgimento de condições de um ensino significativo e, provavelmente, mais eficaz (KALLEF, 2004, p. 5).

Assim fazendo uma abordagem sobre o estudo da Geometria do Táxi como um saber científico, estudando sua métrica e suas principais propriedades, nos possibilita entender como eles podem ser trabalhados como um saber escolar.

## A GEOMETRIA DO TÁXI

A Geometria do Táxi surge, primeiramente, na topologia com base teórica nas definições de espaços métricos. O responsável pelo surgimento da métrica do táxi foi um russo com o nome de Hermann Minkowski (1864-1909), um dos professores de Einstein, que escreveu e publicou um trabalho sobre um conjunto de métricas diferentes, incluindo o que agora é conhecido como a métrica da Geometria do Táxi.

Em 1952, Karl Menger propôs uma exibição no Museu da Ciência e Indústria de Chicago, que destacou a geometria. Um pequeno livreto foi distribuído neste evento, intitulado como "Você vai gostar de Geometria" e foi nas páginas dele que a geometria de Minkowski foi chamada de "taxicab" geometry pela primeira vez, ou seja, foi quando se usou o termo Geometria do Táxi pela primeira vez.

Segundo Wanderley *et al.* (2002) a Geometria do Táxi apresenta muitas propriedades semelhantes às da Geometria Euclidiana. Utiliza-se da mesma definição de ponto e reta, a táxi-distância (distância na Geometria do Táxi) é sempre não negativa e só vale zero se os pontos coincidirem, é simétrica e ainda satisfaz a desigualdade triangular.

Para melhor entendermos a comparação, vejamos as definições das métricas utilizadas tanto na Geometria Euclidiana como na Geometria do Táxi.

Conforme Lima (1977) uma *métrica* num conjunto  $M$  é uma função  $d: M \times M \rightarrow \mathbb{R}$ , que associa a cada par ordenado dos elementos  $x, y \in M$  um número real  $d(x, y)$ , chamado a *distância* de  $x$  a  $y$ , de modo que sejam satisfeitas as seguintes condições para quaisquer  $x, y, z \in M$ :

- (i)  $d(x, x) = 0$ ;
- (ii) *Se  $x \neq y$  então  $d(x, y) > 0$ ;*



(iii)  $d(x,y) = d(y,x);$

(iv)  $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z).$

Analisando os quatro Postulados acima, observamos que:

- A) Os postulados (i) e (ii) nos dizem que  $d(x,y) = 0$  se, e somente se,  $x = y$ .
- B) O postulado (iii) afirma que a distância  $d(x,y)$  é uma função simétrica das variáveis  $x, y$ . Assim, seja  $M$  um conjunto qualquer. Uma função de  $M$  em  $M$ , denotado por  $d: M \rightarrow M$  é uma terna  $(d,M,M)$  onde  $d$  é uma relação de  $M$  em  $M$  e que será simétrica se  $\forall x,y,z \in M$  se  $(x,y) \in d \Rightarrow (y,x) \in d$ , ou seja,  $x d y \Rightarrow y d x$ .
- C) A condição (iv) chama-se *desigualdade do triângulo*; ela tem origem no fato que, no plano euclidiano, o comprimento de um dos lados de um triângulo não excede a soma dos outros dois. Porém, é possível visualizar geometricamente a desigualdade do triângulo no Plano Euclidiano. Veja as figuras abaixo:

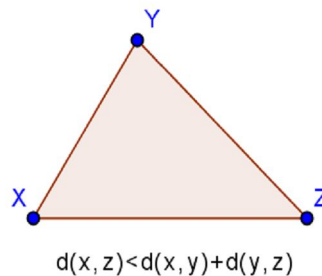


Figura 1: Desigualdade triangular na geometria plana  
Fonte: Lima (1977)

Geometricamente, significa que a soma de dois lados quaisquer de um triângulo é maior que o terceiro lado.

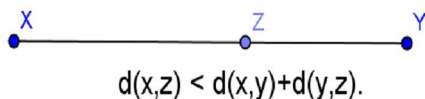


Figura 3: Distância entre X e Y  
Fonte: Lima (1977)

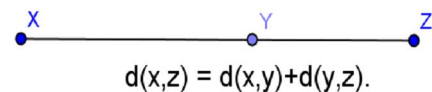


Figura 4: Distância entre X e Z  
Fonte: Lima (1977)

A figura 3 nos diz que a distância entre um ponto de origem no caso o ponto X até um ponto Z, entre X e Y, é menor que a soma das distâncias entre  $\overline{XY}$  e  $\overline{YZ}$ .

Entretanto a figura 4 nos mostra que a distancia entre um ponto X até Y e desse ponto Y até Z será mínima quando o ponto Y pertencer ao segmento  $\overline{XZ}$

Segundo Lima (1977) a métrica



$$d: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(X, Y) \mapsto d(X, Y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}$$

é chamada *euclidiana*. Ela provém da fórmula para a distância entre dois pontos do plano (em coordenadas cartesianas), a qual se prova com o Teorema de Pitágoras. Evidentemente, para considerações de natureza geométrica,  $d$  é a métrica natural, pois fornece a distancia da Geometria Euclidiana.

Por outro lado, a métrica

$$d': \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(X, Y) \mapsto d'(X, Y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| + \dots + |x_n - y_n| = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|$$

é formalmente mais simples, de manipulação mais fácil. Lima (1977) propõe uma interpretação mais intuitiva para a métrica  $d'$  que pode ser obtida, no caso de  $n = 2$ , imaginando que o plano  $\mathbb{R}^2$  é a planta de uma cidade cujas ruas são retas paralelas aos eixos coordenados  $x = 0$  e  $y = 0$ . Então o menor caminho ligando dois pontos  $X = (x_1, x_2)$  e  $Y = (y_1, y_2)$  através das ruas tem comprimento igual a  $d'(X, Y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$ .

Segundo Wanderley *et al.* (2002), em relação a outros aspectos, a táxi-distância pode ser muito diferente da euclidiana e às vezes sendo surpreendente o seu comportamento. Sugere o exemplo que, na Geometria Euclidiana, quando aplicada uma translação ou uma rotação a um segmento, seu comprimento permanece inalterado. Já na táxi-distância, uma translação de fato não altera a distância entre dois pontos, mas uma rotação pode alterar.

Consideremos que os eixos dados  $Ox$  e  $Oy$  foram transladados aos eixos  $O'x'$  e  $O'y'$  com nova origem  $O' = (h, k)$  em relação aos eixos dados.

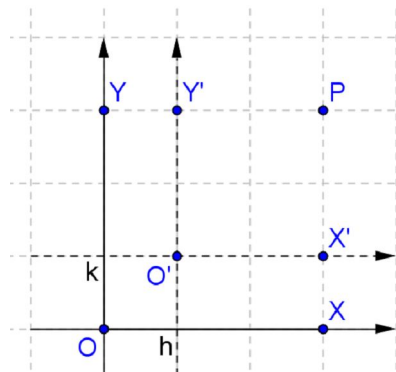


Figura 5: translação de eixos

Seja  $P$  um ponto de coordenadas  $(x, y)$  em relação aos eixos originais e em relação aos novos eixos  $(x', y')$ . Relacionando  $(x, y)$  com  $(x', y')$  temos que:



$$\begin{cases} x = x' + h \\ y = y' + k \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x' = x - h \\ y' = y - k \end{cases}$$

Com isso, seja  $A = (2,2)$  e  $B = (3,3)$ .

A distância euclidiana, no sistema de coordenadas com centro em  $O$ , dos pontos  $A$  e  $B$  é  $d_E(A, B) = \sqrt{(3-2)^2 + (3-2)^2} = \sqrt{2}$  não se alterando quando ocorre a translação dos eixos em que  $h = k = 1$ :  $d_E(A, B) = \sqrt{(2-1)^2 + (2-1)^2} = \sqrt{2}$ .

Com a Geometria do Táxi, também se verifica que não altera a táxi-distância:  $d_T(A, B) = |3-2| + |3-2| = 2$  para os eixos  $Ox$  e  $Oy$  e para os eixos  $Ox'$  e  $Oy'$  temos  $d_T(A, B) = |2-1| + |2-1| = 2$ .

Já em relação à rotação de eixos, vejamos o seguinte exemplo com os mesmos pontos  $A$  e  $B$ :

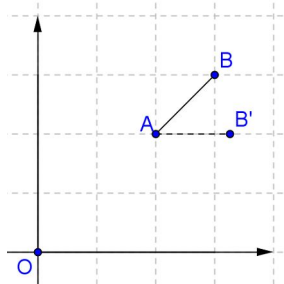


Figura 6: rotação do segmento  $AB$

Se girarmos o segmento  $\overline{AB}$  em torno do ponto  $A$  de  $45^\circ$  no sentido positivo,  $A$  permanecerá o mesmo, enquanto  $B(3,3)$  se transformará em  $B' = (2 + \sqrt{2}; 2)$  e assim a da taxi-distância valerá  $d_T(A, B') = |2 - (2 + \sqrt{2})| + |2 - 2| = \sqrt{2}$  sendo diferente de 2, ou seja, alterou o valor da táxi-distância.

Esse fato pode parecer chocante observado pela primeira vez, porém reflete apenas a influência do *desenho das ruas* na táxi-distância, conforme Wanderley *et al* (2002).

Com isso, vemos que a Geometria do Táxi sendo uma Geometria Não-euclidiana

[...] é de fácil entendimento, tem estrutura semelhante e paralela à da geometria euclidiana, apesar de negar que a menor distância entre dois pontos quaisquer seja dada pelo segmento de reta; é um modelo natural do mundo construído pelo homem e pode ser abordada em todos os níveis escolares (MIRANDA *et al.*, 2005, p.2).

É uma geometria de fácil compreensão, visto que retrata um ambiente vivenciado pela maioria dos estudantes, a geografia urbana, facilitando a aceitação pela disciplina de matemática.



Vejamos outra situação: O *Teorema da Desigualdade Triangular* na geometria plana afirma que a soma de dois lados de um triângulo é *estritamente maior* do que o terceiro lado, conforme enunciado na proposição 20 no livro *Os Elementos: Em qualquer triângulo a soma de quaisquer dois lados é maior que o outro lado*. Contudo, essa afirmação não se verifica na Geometria do Táxi. A figura abaixo mostra um contra-exemplo de dois lados de um triângulo não sendo maior do que o terceiro lado, *conforme a medida com a métrica da Geometria do Táxi*.

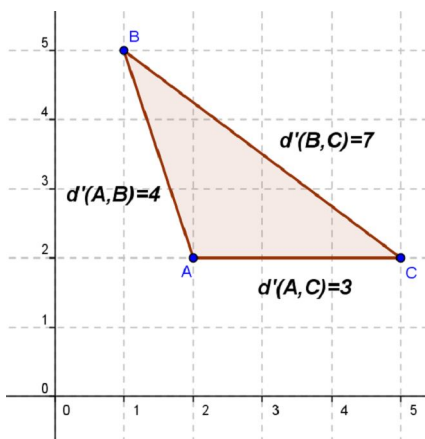


Figura 7: Desigualdade Triangular na Geometria do Táxi

Felizmente, o postulado (iv)  $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$  sobre métricas requer que a soma de duas distâncias passando por um ponto intermediário seja maior ou igual a distância direta entre os pontos. E, certamente, a métrica do táxi segue esse axioma.

Observe neste exemplo adaptado, proposto por Janssen (2007), como a métrica do táxi pode ser aplicada. No plano cartesiano abaixo, utilizando-se da métrica euclidiana, foi medida a distância  $d(A, B)$  e  $d(A, C)$ .

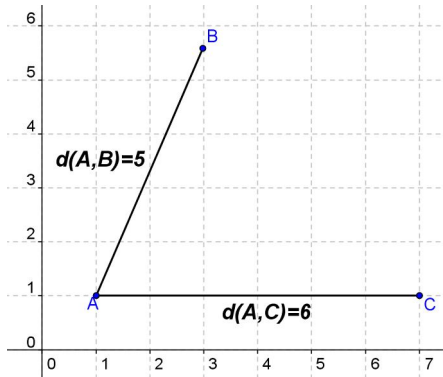


Figura 8: Distância euclidiana entre os pontos

Com as medidas constantes do plano cartesiano acima seria simplesmente afirmar que  $d(A, B) = 5$  e  $d(A, C) = 6$  e ainda que  $d(A, B) < d(A, C)$ . Deste modo, B está mais

perto de A que C. Agora, considere os pontos (orientados de forma similar) no mapa a seguir. Se você está dirigindo e planeja manter a sua carteira de motorista, as suas distâncias serão medidas de uma forma muito diferente.

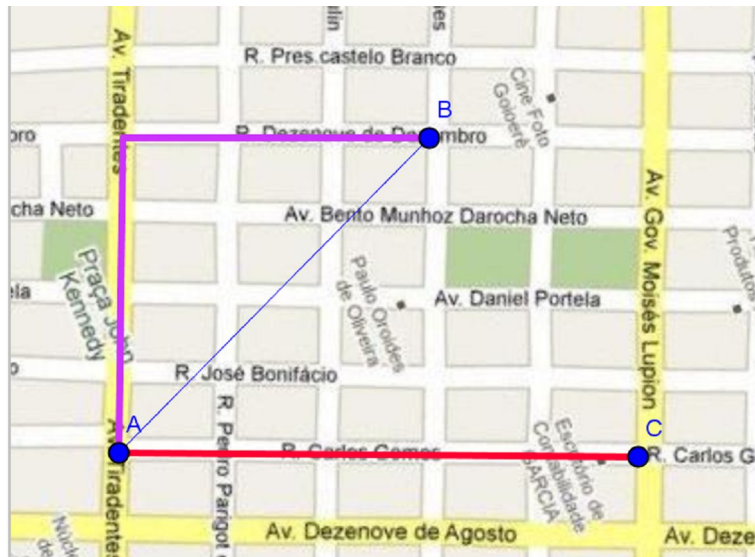


Figura 9: Pontos A, B e C na cidade de Goioerê - PR

Agora parece que a distância de A para B é de 7 blocos, enquanto que a distância de A a C é de 5 blocos. A menos que o motorista opte por ir “fora da estrada”, C está agora mais perto de A do que B. A fórmula de distância euclidiana tem toda sua importância, mas nas ruas da cidade não é o local mais adequado para ser aplicada. *A distância da Geometria do Táxi (táxi-distância) às vezes é igual à distância euclidiana, mas em muitos casos, é superior a distância euclidiana.*

## CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este artigo visa apenas uma introdução sobre os conceitos iniciais da Geometria do Táxi. Desse modo, vemos que a compreensão de algumas propriedades da Geometria do Táxi se torna mais fácil, visto que são semelhantes às propriedades da Geometria Euclidiana, não ocasionando um “choque” de conceitos geométricos.

Porém, é importante ressaltar que a métrica utilizada pela Geometria do Táxi, é um modelo mais adequado para descrever a geografia urbana do que a Geometria Euclidiana, e ainda segundo Miranda *et al* (2005) ela nega que a menor distância entre dois pontos quaisquer seja dada pelo segmento de reta, ou seja, a distância entre dois pontos na métrica da Geometria do Táxi é considerada como a *soma* das distâncias em cada direção, sendo assim, na direção horizontal e na direção vertical, como ocorre no deslocamento de





um táxi numa cidade, e com isso, permite reflexões sobre a aplicabilidade da Geometria do taxista.

De maneira geral, este trabalho também possibilita analisar a matemática sobre outra perspectiva, observar que a matemática possui outros aspectos, características e propriedades que não estamos habituados. E com o intuito de divulgar a Geometria do Táxi, acreditamos que este artigo pode beneficiar professores e futuros professores de matemática para que tenham contato com outro tipo de geometria que não seja a Geometria Euclidiana tradicionalmente ensinada nas escolas.

## REFERÊNCIAS

JANSSEN, Christina. **Taxicab Geometry: Not the Shortest Ride Across Town** (Exploring Conics with a Non-Euclidean Metric). Iowa State University, 2007.

KALLEF, Ana Maria. et. al. **Desenvolvimento de Atividades Introdutórias ao Estudo das Geometrias Não-Euclidianas**: Atividades Interdisciplinares para Sala de Aula e Museus Interativos. In. CONGRESSO BRASILEIRO DE EXTENSÃO UNIVERSITÁRIA, 2., 2004. Belo Horizonte. *Anais...* Belo Horizonte: UFMG, 2004.

KALLEF, Ana Maria. NASCIMENTO, Rogério Santos do. Atividades Introdutórias às Geometrias Não-Euclidianas: **o exemplo da Geometria do Táxi**. BOLETIM GEPEM, **Rio de Janeiro**, n. 44, p. 11-42, jan./jun., 2004.

LIMA, Elon Lages. **Espaços Métricos**. **Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1977**

MIRANDA, Dimas Felipe de. Barroso, Leônidas Conceição. Abreu, João Francisco de. **Geometria Taxi**: Uma Geometria Não Euclidiana Descomplicada. In. ENCONTRO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA DE OURO PRETO, 3., 2005. Ouro Preto. *Anais...* Ouro Preto: UFOP, 2005

PAIS, Luiz Carlos. **Didática da Matemática**: uma análise da influência francesa. Belo Horizonte: Autêntica, 2005.

TESSON, Pascal. **Taxicab Geometry**. Disponível em <<http://cgm.cs.mcgill.ca/~godfried/teaching/projects.pr.98/tesson/taxi/644project.html>> Acesso em: 16 out. 2009.

WANDERLEY, A. J. M. et al. **Como melhorar a vida de um casal usando uma geometria não-euclidiana**. Revista do Professor de Matemática, São Paulo, v. 50. p. 23-30, 2002.