EQUAÇÕES DIFERENCIAIS APLICADAS EM MODELOS DE COMPARTIMENTOS

Tiago Novello de Brito – Fecilcam, tiago-novello@hotmail.com
Valdete dos Santos Coqueiro – Fecilcam, vcoqueiro@yahoo.com.br
Rosangela Teixeira Guedes – UTFPR, rt_guedes@hotmail.com

RESUMO: Este artigo tem por objetivo apresentar aplicações de Equações Diferenciais Lineares em Modelos de compartimentos. Para isto foram necessárias algumas noções preliminares sobre Equações Diferenciais e a teoria de Autovalores e Autovetores aplicados em Sistemas de Equações Diferenciais Lineares de Primeira Ordem. Também foram realizadas pesquisas de modelos de compartimentos envolvendo modelos como Desintegração Radioativa, Modelo Populacional de Malthus, Difusão de Moléculas através de uma Membrana Celular, Difusão de Material através de uma Membrana, Tração Radioativa em Glóbulos vermelhos e Modelo tanque. As soluções destes modelos foram apresentadas usando Equações Diferenciais e Sistemas de Equações Diferenciais Lineares de Primeira Ordem.

Palavras-chave: Equações Diferenciais. Autovalores e Autovetores. Modelos de Compartimentos.

1 INTRODUÇÃO

Neste trabalho estudamos o sistema compartimental de p compartimentos da forma

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq 1}}^{p} k_{ij} x_j - \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq 1}}^{p} k_{ij} x_i - k_{i0} x_i + b_i u_i(t) \tag{1}$$

com $x_i(0) = \alpha_i$ conhecido.

Um sistema de compartimento consiste essencialmente de um número finito de subsistemas homogêneos interligados, chamados compartimentos, que trocam entre si e com o meio ambiente quantidades ou concentrações de materiais. A troca efetuada em cada compartimento é descrita por uma equação diferencial de primeira ordem.

A quantidade de material (ou concentração) existente no compartimento i, no instante t é dado pelo termo $x_i = x_i(t)$.

O fluxo do compartimento j para o compartimento i, é dado pelo termo $K_{ij} x_j$ e é diretamente proporcional à quantidade x_j, mas independente da quantidade x_i do compartimento receptor. O índice 0 denota o meio ambiente e as constantes K_{ij} são considerados todas não negativas. O fluxo do meio ambiente (imput) para o compartimento receptor i é considerado por $b_i u_i(t)$.

Se $k_{i0} = 0;\ i = 1, 2, \ldots p,$ diz-se que o sistema é fechado, caso contrário será aberto.

Se o sistema de compartimentos tiver apenas um compartimento é dado pela equação de primeira ordem linear

$$\frac{dx_i}{dt} = -k_{10}x_1 + b_1 u_1(t). \tag{2}$$

Consideraremos apenas modelos de compartimentos lineares por ser mais usado em aplicações.

2 RESULTADOS PRELIMINARES

2.1 Equações Diferenciais Ordinárias Lineares

Definição 2.1.1: Uma equação que contém derivadas ou diferenciais de uma ou mais variáveis dependentes, em relação a uma ou mais variáveis independentes, é chamada de equação diferencial (ED).

Definição 2.1.2: Quando a equação contém somente derivadas ordinárias de uma ou mais variáveis dependentes, em relação a uma única variável independente, é chamada de equação diferencial ordinária (EDO).

Definição 2.1.3: Uma equação diferencial ordinária é chamada de linear quando é dada pela equação $a_n(x)\dfrac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\dfrac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \ldots + a_1(x)\dfrac{d\ y}{dx} + a_0(x)y = g(x)$.
e são caracterizadas pelas propriedades:
(i) A variável dependente y e todas as suas derivadas são do primeiro grau.
(ii) Cada coeficiente depende apenas da variável independente x.

Teorema 2.1.4: Se as funções p e g são contínuas em um intervalo aberto $I : \alpha < t < \beta$ contendo o ponto $t = t_0$, então existe uma única função $y = \phi(t)$ que satisfaz a equação diferencial $\dfrac{dy}{dt} + p(t)y = g(t)$ para cada t em I com a condição inicial $y(t_0) = y_0$ onde y_0 é o valor inicial arbitrário prescrito.

2.2 Sistema de Equações Diferenciais Ordinárias Lineares de Primeira Ordem

O Sistema de Equações Diferenciais Ordinárias Lineares de Primeira Ordem Não homogêneos na forma canônica é dado por

$$\frac{dx_1}{dt} = a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2 + \ldots + a_{1n}(t)x_n + f_1(t)$$ (3)

$$\frac{dx_2}{dt} = a_{21}(t)x_1 + a_{22}(t)x_2 + \ldots + a_{2n}(t)x_n + f_2(t)$$

$$\vdots$$

$$\frac{dx_n}{dt} = a_{n1}(t)x_1 + a_{n2}(t)x_2 + \ldots + a_{nn}(t)x_n + f_n(t)$$

onde os coeficientes a_{ij} e as f_i são funções contínuas no intervalo I. Quando $f_i\,(t) = 0$, $i = 1,2,\ldots,n$, o sistema se diz homogêneo e em caso contrário, é não homogêneo.

Se X, $A(t)$ e $F(t)$ denotam, respectivamente, as matrizes

$$X = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}, \quad A(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \cdots & a_{2n}(t) \\ \vdots & & & \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{pmatrix}, \quad F(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{pmatrix}$$

, então o sistema (3) pode ser escrito na forma matricial como

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \cdots & a_{2n}(t) \\ \vdots & & & \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{pmatrix}$$ (4)

Ou ainda, $\dfrac{dX}{dt} = A(t)X + F(t)$, e se o sistema (4) for homogêneo temos que $\dfrac{dX}{dt} = A(t)X$.

Definição 2.2.1: Um vetor solução em um intervalo I é uma matriz coluna

$$X = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$$

cujos elementos são funções diferenciáveis que verificam o sistema (4) no intervalo I.

Definição 2.2.2: Seja V um espaço vetorial sobre IR e $T : V \to V$ um operador linear. Se existirem $\lambda \in IR$ e $v \in V$, com $v \neq 0$, tais que,

$Tv = \lambda v$, diremos que $\lambda \in IR$ é um autovalor de T e que $v \neq 0$ é um autovetor de T associado ao autovalor λ.

2.2.3 Solução de Sistemas de Equações Diferenciais Ordinárias Lineares de Primeira Ordem usando autovalores e autovetores

Se o vetor $X = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix} e^{\lambda t} = k e^{\lambda t}$ deve ser solução para o sistema linear homogêneo de primeira ordem $\frac{dX}{dt} = A(t)X$, onde A é uma matriz de constantes $n \times n$ então $X' = K\lambda e^{\lambda t}$ e substituindo no sistema temos que $K\lambda e^{\lambda t} = AK\lambda e^{\lambda t}$, ou ainda, $(A - \lambda I)K = 0$. E para que a equação $(A - \lambda I)K = 0$ tenha soluções não triviais é necessário que $\det(A - \lambda I) = 0$. Em outras palavras, $X = Ke^{\lambda t}$ será uma solução do sistema de equações diferenciais $X' = AX$, se e somente se, λ for um autovalor de A e K um autovetor correspondente a λ .

Quando a matriz A_{nxn} possui n autovalores reais distintos $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$, então sempre é possível determinar um conjunto de n autovetores linearmente independentes $K_1, K_2, ..., K_n$ e $X_1 = K_1 e^{\lambda 1 t}, X_2 = K_2 e^{\lambda_2 t}, ..., X_n = K_n e^{\lambda_n t}$ é um conjunto fundamental de soluções de $X' = AX$ em $(-\infty, \infty)$. E a solução geral de $X' = AX$ é a combinação linear desse conjunto fundamental de soluções, ou seja, X = $C_1 X_1 + C_2 X_2 + ... + C_n X_n$.

A seguir, serão apresentados Modelos de compartimentos, bem como a solução dos mesmos via Equação Diferencial Ordinária e Sistema de Equações Diferenciais Ordinárias Lineares de Primeira Ordem.

3 MODELOS DE COMPARTIMENTOS

3.1 Desintegração Radioativa

A atividade de uma substância radioativa é medida pelo número de desintegrações por unidade de tempo. Este fenômeno é devido à emissão de três tipos de radiações: partículas α (núcleos de hélio), partículas β (elétrons) e raios γ (ondas eletromagnéticas de alta frequência). Os principais experimentos de que resultaram tal compreensão foram realizados por Rutheford, Becquerel, Royds, Vilard e M. Curie no final do século passado e início deste, quando já se sabia que a atividade é proporcional ao número de átomos radioativos presentes em cada instante.

Se $N = N(t)$ é o número de átomos radioativos na amostra no instante t, a equação diferencial é

$$\frac{dN}{dt} = -\lambda N \tag{5}$$

e N_0 é a quantidade inicial de átomos, isto é, $N(0) = N_0$.

Usando o método de separação de variáveis para determinar a solução de (5) temos que

$$\frac{dN}{dt} = -\lambda N$$

$$\frac{dN}{N} = -\lambda dt$$

$$\int NdN = -\lambda \int dt$$

$$\ln(N) = -\lambda t + c_1$$

$$N(t) = e^{-\lambda t + c_1}$$

$$N(t) = e^{\lambda t} e^{c_1}$$

$$N(t) = ce^{-\lambda t}$$

Com a condição inicial $N(0) = N_0$ temos que $N_0 = C$. Portanto $N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$ é a solução de (5).

3.2 Modelo Populacional de Malthus

Problemas que envolvem a população nos levam a perguntas do tipo, qual será a população de certo local ou um determinado meio ambiente em alguns anos? Ou ainda, como poderemos proteger os recursos deste local ou deste meio ambiente para que não ocorra a extinção de uma ou de várias espécies?

Para tratar de problemas como estes e ainda apresentar uma aplicação de equações diferencias, consideremos o modelo matemático utilizado para tratar do crescimento populacional de algumas espécies, sendo este conhecido como Modelo de Crescimento Exponencial de Malthus, na qual estabelece que a taxa de variação da população em relação ao tempo é proporcional a população presente. Desta forma, se $N = N(t)$ representa a população, então $\frac{dN}{dt} = kN$

onde a taxa k é uma constante. Se $k \geq 0$, teremos crescimento, e se $k \leq 0$ teremos decaimento. Desta forma, a equação diferencial que representa o Modelo Populacional de Malthus satisfaz o modelo de compartimento da equação (2) homogênea.

A equação linear $\frac{dN}{dt} = kN$ apresenta a seguinte solução $N(t) = N_O e^{kt}$, na qual N_o se trata da população inicial, ou seja, $N(0) = N_o$. Assim, temos a seguinte conclusão: Se $k > 0$, a população vai crescer. Se $k < 0$, significa que a população vai tender a 0, ou seja vai fica nula.

Mas o modelo pode não funcionar bem a longo prazo. O principal argumento para isso deriva-se do ambiente. A complicação é que o crescimento populacional é limitado por algum fator. Quando uma determinada população apresenta-se distante do seu limite de crescimento e pode crescer de forma exponencial, mas quando esta população esta perto de seu fim o pode existir variações.

3.3 Difusão de Moléculas através de uma Membrana Celular

O processo de difusão de membranas celulares é bastante complexo. Faremos aqui uma aproximação simplificada baseada na Lei de Fick: “O fluxo através de uma membrana é proporcional à área da membrana e à diferença de concentração de ambos os meios separados por ela, se esta diferença de concentração for pequena”.

Suponhamos que uma célula de volume constante V esteja mergulhada em um meio líquido homogêneo de concentração C_e . O processo de difusão garante que existe um fluxo de moléculas através da membrana da célula em ambas as direções, até que a concentração da solução em seu interior $C = C(t)$ seja igual a C_e .

Seja $m = m(t)$ a massa da solução no interior da célula, então pela definição de concentração,

$m(t) = V\ C(T).$

O fluxo pode ser representado por $\frac{dm}{dt}$ (taxa de variação da massa). Assim, a lei de Fick é expressa matematicamente por:

$\frac{dm}{dt} = kA(C_e - C).$ Se $m(t) = V\ C(T)$ então $\frac{dm}{dt} = V\frac{dC}{dt}$ o qual resulta em

$$\frac{dC}{dt} = \frac{kA}{V}(C_e - C) \qquad (6)$$

onde A é a área da membrana (suposta constante) e k é a constante de permeabilidade, determinada para cada solução, estrutura e espessura da membrana.

Se $C_e > C(t)$ em cada instante t, o fluxo de moléculas será maior no sentido de fora para dentro da célula e, portanto, entram mais células do que saem. Isto implica que $C = C(t)$ é crescente, isto é, $\frac{dC}{dt} > 0$. O contrário ocorre quando $C_e < C(t)$.

Desta forma, podemos considerar $k > 0$ em ambos os casos.

A solução geral da equação (6) é dada por

$C(t) = Ke^{-\frac{kA}{V}t} + C_e$ onde K é a constante de integração.

Se a concentração inicial da solução no interior da célula for $C_0 = C(0)$ então

$C(t) = (C_0 - C_e)e^{-\frac{kA}{V}t} + C_e$ onde

C_e é um ponto de equilíbrio. Se $C_0 = C_e$, então $C(t) = (C_e - C_e)e^{-\frac{kA}{V}} + C_e = C_e$, para todo t e $\frac{dC}{dt} = 0$. Neste caso, as concentrações dentro e fora são iguais, nada muda.

Se $C_0 \neq C_e$ e como $-\frac{kA}{V} < 0$, então $\lim_{t \to \infty} C(t) = C_e$, pois $e^{-\frac{kA}{V}t}$ tende a zero quando t cresce.

3.4 Difusão de Material através de uma Membrana

Uma célula, considerada de volume constante, é suspensa em um líquido homogêneo que contém uma solução de concentração $C_1(t)$ e $C_2(t)$ é a concentração da solução no interior da célula no instante t (e supomos que a distribuição da solução através da célula dependa somente do tempo). Por difusão, moléculas da solução entrarão na célula, assim como outras deverão sair. Dessa forma, existira um fluxo de moléculas através da membrana celular em ambas as direções. Se $C_1 > C_2$, o fluxo de solução do líquido para a célula será maior do que o que sai e vice-versa, se $C_1 < C_2$. A lei de Fick estabelece que: O fluxo de substância por unidade de área é proporcional à diferença de concentração de ambos os lados da membrana.

Sejam V_1 o volume da célula (constante) e V_2 o volume do líquido que a envolve (também constante). Assim a Lei de Fick permite escrever o sistema de equações diferenciais

$$V_1 \frac{dC_1}{dt} = kA(C_2 - C_1) \qquad (7)$$

$$V_2 \frac{dC_2}{dt} = kA(C_1 - C_2)$$

onde k é o coeficiente de difusão ou permeabilidade da membrana. Este é um exemplo de um sistema bicompartimental fechado.

Considerando $V_1 = V_2$ então $k_{12} = k_{21} = \frac{kA}{V}$ e denotando $a = \frac{kA}{V}$ (constante).

O sistema (7) pode ser escrito como

$$\frac{dC_1}{dt} = -aC_1 + aC_2 \qquad (8)$$

$$\frac{dC_2}{dt} = -aC_1 - aC_2$$

Seja $A = \begin{pmatrix} -a & a \\ a & -a \end{pmatrix}$ a matriz dos coeficientes e calculando $\det(\text{A-}\lambda\text{I}) = 0$ obtemos o polinômio característico

$$p(\lambda) = (-a-\lambda)^2 = -a^2 = \lambda(2a+\lambda) = 0.$$

Assim, os autovalores são $\lambda = 0$ e $\lambda = -2a.$ E para cada autovalor substituindo na equação $(\text{A-}\lambda\text{I})\,\text{K}=0$ obtemos os autovetores

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ e } v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Portanto a solução geral do sistema (8) é dada por

$$C_1(t) = A_1 + A_2 e^{-2at}$$

$$C_2(t) = A_1 - A_2 e^{-2at}$$

Se considerarmos as condições iniciais $C_1(0) = C_1^0$ e $C_2(0) = C_2^0$, teremos $C_1^0 = A_1 + A_2$ e $C_2^0 = A_1 - A_2$.

Donde $A_1 = \frac{(C_1^0 + C_2^0)}{2}$ e $A_2 = \frac{(C_1^0 - C_2^0)}{2}$. Assim, quando $t \to +\infty$, $C_1(t)$ e $C_2(t)$ tendem à mesma concentração $\frac{(C_1^0 + C_2^0)}{2}$, médias das concentrações iniciais.

A concentração final tende a se equilibrar, isto é, a concentração interior tende a ser a mesma que a do líquido $(C_1 = C_2)$.

3.5 Tração Radioativa em glóbulos vermelhos

Na corrente sanguínea humana ions de potássio estão constantemente se movendo para dentro e para fora dos glóbulos vermelhos (hemácias). As superfícies das hemácias são permeáveis aos ions k^+. As razões com que estes ions entram ou saem das hemácias para o plasma são geralmente distintas. Se considerarmos todos os glóbulos vermelhos indistintamente, podemos supor que a corrente sanguínea seja esquematizada por duas caixas (ou compartimentos), uma para os glóbulos a outra para o plasma.

Seja t o tempo decorrido desde que seja introduzida uma quantidade A de ions K^{42+} no sangue. Denotamos por $h(t)$ e $p(t)$ as quantidades de ions K^{42+}, respectivamente, nas hemácias e no plasma.

Consideremos as condições iniciais $h(0) = 0$ e $p(0) = A$ (constante). Como este sistema compartimental é fechado, podemos considerar que

$h(t) + p(t) = A$, para todo $t \geq 0$

Como o fluxo de ions que saem das hemácias é proporcional a $h(t)$ e dos que entram é proporcional a $p(t)$, podemos escrever

$$\frac{dh(t)}{dt} = k_{21}p(t) - k_{12}h(t) \text{ e como p(t) = A - h(t) então}$$

$$\frac{dh}{dt} = k_{21}(A-h) - k_{12}h = k_{21}A - (k_{21}+k_{12})h \tag{9}$$

e pelo método de separação de variáveis, obtemos

$$-\frac{1}{k_{21}+k_{12}}\ln\left(\frac{k_{21}A-(k_{21}+k_{12})h(t)}{k_{21}A}\right)=t\ ,$$

e isolando h(t) temos a solução de (9) ,

$h(t)=\dfrac{k_{21}A}{k_{21}+k_{12}}(1-e^{-(k_{21}+k_{12})t})$ e então $\lim\limits_{t\to\infty} h(t)=\dfrac{k_{21}A}{k_{21}+k_{12}}.$

Denotando $B=\dfrac{k_{21}A}{k_{21}+k_{12}}$ onde B pode ser determinado experimentalmente num tempo relativamente curto.

Dividindo $h(t)=\dfrac{k_{21}A}{k_{21}+k_{12}}(1-e^{-(k_{21}+k_{12})t})$ por B, temos $\ln\left(1-\dfrac{h(t)}{B}\right)=-(k_{21}+k_{12})t.$

Dessa forma, o gráfico de $\ln\left(1-\dfrac{h(t)}{B}\right)$ é uma reta cujo coeficiente angular é $m=-(k_{21}+k_{12})$ e que passa pela origem. Assim sendo, podemos obter $k_{21},$ e k_{12}, considerando o sistema

$$\begin{cases} m=-(k_{21}+k_{12}) \\ B=\dfrac{k_{21}A}{k_{21}+k_{12}} \end{cases}$$

Onde $k_{21}=-\dfrac{mB}{A}$ e $k_{12}=\dfrac{(B-A)m}{A}$

Observamos que $k_{21}>0$ e $k_{12}>0$, pois $m<0$ e $B-A<0$.

3.6 Problema tanque

Um tanque A que contém K litros de água em que foram dissolvidos M gramas de sal. Um segundo tanque B, que contém a mesma quantidade de água que A. Bombeia-se o líquido para dentro e para fora dos tanques às taxas indicadas na figura abaixo. Sabendo que $x_1(t)$ e $x_2(t)$ é o número de gramas em função do tempo, nos tanques A e B.

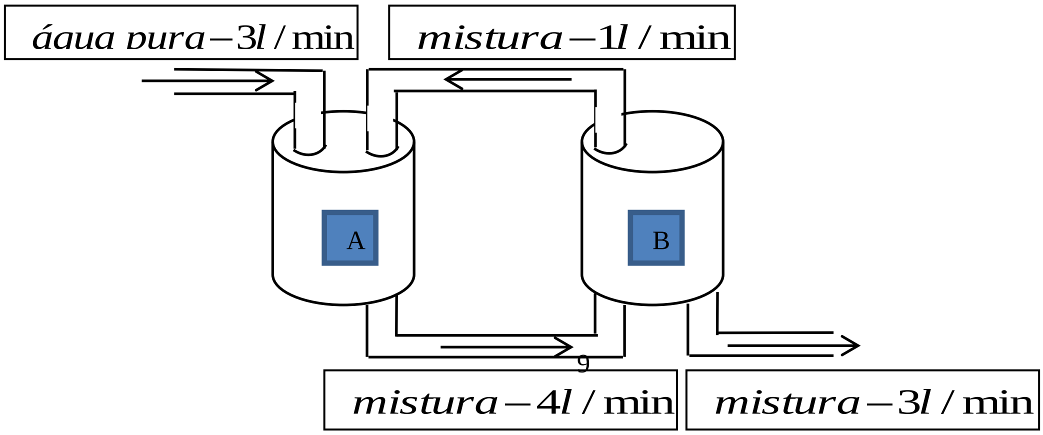

Figura 1: Tanques de água
Fonte: ZILL, 2005

A taxa líquida de variação de $x_1(t)$ em $g/\min$ é

$$\frac{dx_1}{dt}=(3l/\min)(0g/l)+(1l/\min)\left(\frac{x_2}{K}g/l\right)-(4l/\min)\left(\frac{x_1}{K}g/l\right)$$

Logo $\frac{dx_1}{dt}=-\frac{4}{K}x_1+\frac{1}{K}x_2$.

Na qual, a expressão $(3l/\min)(0g/l)+(1l/\min)\left(\frac{x_2}{K}g/l\right)$ representa a quantidade em gramas de sal que entra no tanque A em determinado instante. E a expressão $(4l/\min)\left(\frac{x_1}{K}g/l\right)$ representa a quantidade de sal em gramas que é retirado do tanque em um determinado instante.

Por outro lado, a taxa líquida de variação de $x_2(t)$ é

$$\frac{dx_2}{dt}=4.\frac{x1}{K}-3.\frac{x_2}{K}-1.\frac{x_2}{K}=\frac{4}{K}x_1-\frac{2}{K}x_2.$$

Desta forma, obtemos o seguinte sistema de equações diferenciais de primeira ordem.

$$\frac{dx_1}{dt}=-\frac{4}{K}x_1+\frac{1}{K}x_2$$

$$\frac{dx_2}{dt}=\frac{4}{K}x_1-\frac{2}{K}x_2.$$

Considerando que ambos os tanques possuem 50 litros de água, temos o seguinte sistema de equações diferenciais

$$\frac{dx_1}{dt}=-\frac{2}{25}x_1+\frac{1}{50}x_2 \qquad (10)$$

$$\frac{dx_2}{dt}=\frac{2}{25}x_1-\frac{2}{25}x_2$$

Seja $A=\begin{pmatrix} -2/25 & \\ 2/25 & -2/50 \end{pmatrix}$ a matriz dos coeficientes, a equação característica é

$$\det(A-\lambda I)=\begin{vmatrix} -\frac{2}{25}-\lambda & \frac{1}{50} \\ \frac{2}{25} & -\frac{2}{25}-\lambda \end{vmatrix}=\lambda^2+\frac{4\lambda}{25}+\frac{3}{625}=0.$$

Resolvendo a equação $\lambda^2+\frac{4\lambda}{25}+\frac{3}{625}=0$, obtemos os autovalores $\lambda_1=\frac{-3}{25}$ e $\lambda_2=-\frac{1}{25}$. E para cada autovalor substituindo na equação $(A\text{-}\lambda I)\,K=0$ obtemos os autovetores associados

$v_1=\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$ e $v_2=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$.

Desta forma, o conjunto fundamental de soluções do sistema (10) são $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^{(-3/25)t}$ e $X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{(-1/25)t}$ e sendo linearmente independentes, a solução geral do sistema (10) é uma combinação linear desse conjunto de soluções, ou seja,

$$x_1(t) = c_1 e^{(-1/25)t} + c_2 e^{(-3/25)t}$$
$$x_2(t) = -2c_1 e^{(-1/25)t} + 2c_2 e^{(-3/25)t}$$

onde c_1 e c_2 são constantes. Observe que $\lim_{t \to \infty} x_1(t) = 0$ e $\lim_{t \to \infty} x_2(t) = 0$, o que significa que com o passar do tempo a quantidade de sal se dissolve.

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Podemos destacar que os modelos de compartimentos podem ser modelados por equações diferenciais ou sistemas de equações diferenciais.

Dentre muitas das aplicações de modelos de compartimentos nas ciências, destacamos os modelos populacionais, desintegração e de Difusão.

No modelo de Desintegração Radioativa como a atividade de uma substância radioativa é proporcional ao número de átomos radioativos presentes em cada instante, desta forma, foi obtida a equação diferencial e com o método de separação de variáveis obtido a solução da substância radioativa em relação ao tempo.

Embora o modelo populacional de Malthus apresenta falhas, devido a análise da solução obtida, mesmo assim é apropriado para a análise do crescimento populacional de uma cidade.

Com a Lei de Fick de que o fluxo de substância por unidade de área é proporcional à diferença de concentração de ambos os lados da membrana, foi modelado a equação diferencial do Modelo Difusão de Moléculas através de uma Membrana Celular e do sistema de equações diferenciais lineares do modelo de Difusão de Material através de uma Membrana.

Portanto as soluções das equações diferenciais ou dos sistemas de equações diferenciais lineares aplicados nos modelos de compartimentos servem para analisar os fenômenos envolvidos nos modelos.

5 REFERÊNCIAS

ZILL, D. G., CULLEN, M. R. **Equações Diferenciais**. V. 1. São Paulo: Makron Books, 2005.

ZILL, D. G. **Equações Diferenciais com aplicações em modelagem**. São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2003.

BASSANEZI, C. R., JUNIOR, W. C. F. **Equações Diferenciais com Aplicações.** São Paulo: Harbra ltda, 1988.