O LÓGICO-HISTÓRICO E AS GEOMETRIAS NÃO-EUCLIDIANAS

Talita Secorun dos Santos, (UNESPAR/FECILCAM), tsecorun@hotmail.com

RESUMO: Com a elaboração deste trabalho temos o interesse de apresentar algumas reflexões acerca do conceito de lógico-histórico (Kopnin), afim de podemos ter o entendimento e a compreensão do desenvolvimento lógico-histórico das Geometrias não-euclidianas. Comungamos da ideia de que o lógico e o histórico são indissociáveis e que isso é uma premissa necessária para a compreensão do movimento do pensamento. O lógico não apenas reflete a história das Geometrias não-euclidianas como também reflete a história do conhecimento das Geometrias não-euclidianas. Para ensinar Geometrias não-euclidianas, nós, os professores devemos considerar o conceito de lógico-histórico dessas geometrias. Não podemos esquecer de levar em conta: a) a Geometria Euclidiana e o movimento do pensamento teórico a partir do desenvolvimento lógico-histórico do pensar geométrico das diversas civilizações; b) as rupturas que foram necessárias para a criação das Geometrias não-euclidianas e porque foi difícil romper com tais estruturas.

PALAVRAS-CHAVE: *Geometrias não-euclidianas. Lógico-histórico. Educação matemática.*

INTRODUÇÃO

A Geometria Euclidiana foi considerada durante séculos como uma verdade única e incontestável. Tal geometria foi organizada por Euclides em 300 a.C. na obra Os Elementos e fundamentada em postulados, que são verdades aceitas sem demonstração. Os cinco postulados que se encontram na obra Os Elementos são:

> 1. Fique postulado traçar uma reta a partir de todo ponto até todo ponto
> 2. Também prolongar uma reta limitada, continuamente, sobre uma reta.
> 3. E, como todo centro e distância, descrever um círculo.
> 4. E serem iguais entre si todos os ângulos retos
> 5. E, caso uma reta, caindo sobre duas retas, faça os ângulos interiores e do mesmo lado menores do que dois retos, sendo prolongadas as duas retas, ilimitadamente, encontrarem-se no lado no qual estão os menores de que dois retos. (EUCLIDES, 2009, p. 98).

Ao lermos os cinco postulados enunciados acima, percebemos que os quatro primeiros podem ser aceitos sem demonstração com certa facilidade, diferentemente do quinto postulado, que possui uma escrita mais densa. Durante muitos anos, matemáticos tentaram, em vão, mostrar que tal postulado seria um teorema e, portanto, passível de ser demonstrado.

> Existem tentativas de provas de todos os tipos, desde as mais simples, que foram facilmente refutadas, até as mais elaboradas que, no início do século XIX, apareceram na Europa e necessitavam de um olhar atento e rigoroso para serem desqualificadas como verdadeiras demonstrações do quinto postulado de Euclides. Mas todas, das mais ingênuas às mais sofisticadas, continham sempre um raciocínio circular que escondia, dentro da argumentação lógica de sua demonstração, as verdades do próprio quinto postulado que se queria provar (CABARITI, 2004, p.32).

Dentre esses matemáticos que tentaram em vão demonstrar o quinto postulado podemos destacar: Ptolomeu (90 – 168 ac), Proclus (410-485), Nasir Eddin All Tusin (Nasiredin, 1201-1274), F. Commandino (1509-1575), C. S. Clavio (1537–1612), P.A. Cataldi (? -1626), G. A. Boreli (1608-1679), Giordano Vitale (1633-1711), John Wallis (1616-1703), Giovanni Girolamo Saccheri (1667-1733), Johann-Heinrich Lambert (1728-1777), John Playfair (1748-1819) e Adrien-Marie Legendre (1752-1833).

A DESCOBERTA DE NOVAS GEOMETRIAS

Na tentativa de demonstrar o quinto postulado, os matemáticos acabavam usando fatos que eram equivalentes ao quinto postulado. Playfair demonstrou que o quinto postulado de Euclides podia ser substituído pelo seguinte postulado equivalente a ele: Dados um ponto P e uma reta r, existe uma única reta que passa pelo ponto P e é paralela a r. Essa é a maneira como escrevemos o quinto postulado na linguagem atual.

Saccheri deu os primeiros passos em direção a Geometria Hiperbólica. Ele apresentou uma tentativa de demonstrar o quinto postulado que ficou registrada na história, foi o responsável pela construção do Quadrilátero de Saccheri[1] e seus resultados foram usados posteriormente por Legendre, Lobatschewsky e Riemann. Saccheri chegou muito próximo da criação de uma geometria diferente da Geometria Euclidiana, mas não aceitou os resultados que alcançou, mesmo sabendo que neles não havia nenhuma contradição. Era muito difícil admitir a possibilidade da existência de outras geometrias.

> No séc. XVIII, especialmente graças a Saccheri e de Lambert, e nos primeiros decênios do séc. XIX, graças a Legendre, essas discussões se acirraram, mas não levaram a conclusões, porque se achou absurdo admitir a possibilidade de uma Geometria diferente da de Euclides (ABBAGNANO, 2007, p.483).

Depois de séculos de tentativas de demonstração do quinto postulado,foi somente no século XIX que a negação do mesmo levou à criação de outras geometrias, tão consistentes quanto a Geometria Euclidiana. Existem duas maneiras de se negar o quinto postulado. A primeira maneira dá origem à Geometria Hiperbólica: Dados um ponto P e uma reta r, existe mais de uma reta que passa pelo ponto P e é paralela a r. A segundo dá origem à Geometria Elíptica: Dados um ponto P e uma reta r, não existe reta que passa pelo ponto P e é paralela a r.

[1] O Quadrilátero de Saccheri é um tipo especial de quadrilátero que se caracterizam por terem um par de lados opostos de mesma medida e perpendiculares a um terceiro lado.

Desenvolvendo estudos independentes, Gauss (177-1855), Johann Bolyai (1802-1860,) também conhecido como (Janos Bolyai) e Nicolai Ivanovitsch Lobatschewsky (1793-1856) foram os responsáveis pela criação da Geometria Hiperbólica. Gauss foi o primeiro a por em dúvida o quinto postulado, no entanto:

> [...] ninguém estava aberto para o que Gauss suspeitava: que o postulado poderia não valer. Kastner[2] até salientou que somente uma pessoa maluca duvidaria da validade do postulado. Gauss guardou os seus pensamentos para si mesmo, embora tenha escrito suas ideias num diário científico que não foi descoberto até 43 anos depois de sua morte (MLODINOW, 2004, p. 121).

O pai de Janos Bolyai, Farkas Bolyai, que também é conhecido por Wolfgang Bolyai (1775-1856), trocava correspondências com Gauss e passou boa parte da sua vida dedicado ao postulado das paralelas. Quando seu filho mostrou os resultados que havia encontrado, ele os encaminhou para Gauss, este por sua vez o comunicou que já tinha chegado a essas conclusões há algum tempo. Isso fez com que Janos se desanimasse e não publicasse os resultados que havia encontrado. Lobatschewsky foi então o primeiro a publicar e apresentar suas ideias para a comunidade científica e, como era de se esperar, suas ideias foram rejeitadas.

> Só Gauss, Lobacevskij e Bolyai reconheceram e puseram em prática essa possibilidade. Em 1855, uma dissertação de RIEMANN, Sobre as hipóteses que fundamentam a Geometria, mostrava como, com mudanças oportunas no V postulado, seria possível obter não só a Geometria de Euclides e a Geometria de Lobacevskij e Bolyai, mas também uma terceira Geometria (que mais tarde foi chamada de Riemann) (ABBAGNANO, 2007, p.483).

O matemático alemão Bernhard Riemann (1826 -1866), discípulo de Gauss, foi o idealizador da Geometria Elíptica ou Riemanniana.

Com a criação das Geometrias Não-euclidianas não se abandonou o paradigma euclidiano, e o mesmo não pode ser considerado falso. O que houve foi uma mudança na maneira de se olhar para a verdade matemática, tida até então como verdade absoluta. Ela passa a ser uma verdade relativa, que depende da validade dos axiomas.

Até aqui apresentamos um breve histórico das Geometrias não-euclidianas de forma linear e pouco problematizadora. Entendemos que a matemática é uma construção social e que todas as suas criações dependem da sociedade num processo político-social. Assim também foi a criação das

[2] Foi professor de Gauss em Göttingen.

Geometrias não-euclidianas. Não foram apenas fatores internos à própria matemática que impossibilitaram, durante mais de dois mil anos, a criação de outras geometrias diferentes da de Euclides. As filosofias dominantes em cada período, a própria Igreja Romana, a própria academia e a sociedade de maneira geral influenciaram de forma significativa em cada período. “[...] tanto a lógica da matemática como a natureza de seus conhecimentos são elaborações históricas (SOUSA, 2004, p.10)”. No entanto precisamos entender além da apresentação histórica (linear) das Geometrias não-euclidianas. Precisamos entender quais foram as rupturas e as necessidades da criação das Geometrias não-euclidianas, precisamos ir além da história e da apresentação do conteúdo.

A GEOMETRIA NA ESCOLA

Vamos tentar voltar ao tempo e lembrar como nos foi ensinado matemática, em especial nos lembremos de como nos ensinaram geometria e o que nos foi ensinado. “Esquece-se que por trás de toda representação lógica matemática, há uma história. Há vida a pulsar. Há o humano. Há o movimento da palavra, da figura e do número (SOUSA, 2004, p.5)”.

Quando ensinamos Geometria Euclidiana esquecemos muitas vezes toda a sua história, a apresentamos como um conhecimento sem história e não passível de questionamentos. Apresentamos a Geometria Euclidiana, muitas vezes, como um conjunto de fórmulas para cálculo de perímetros, áreas e volumes, privilegiando apenas as regras formais em detrimento de sua dinâmica histórica.

> O simples fato de classificarmos os ângulos em reto, agudo e obtuso na sala de aula, a partir de elementos angulares de objetos, seja na vida diária, seja construída pela criança ou ainda da observação da natureza não garante o entendimento profundo e complexo do conceito de ângulo. Há o esquecimento de se considerar o conceito de movimento que, por sua vez, a abordagem lógica-histórica desse conceito abrange (SOUSA, 2004, p 61)

É preciso compreender que os corpos em movimentos em relação a outros corpos sugerem a formação de ângulos. Assim é a porta em relação ao batente no movimento de abre e fecha. Assim é o Sol em relação ao planeta Terra.

Segundo Santos (2009) grande parte dos professores não sabe que a Geometria que ensinam na escola é denominada Geometria Euclidiana, muitos nem sabiam quem era Euclides e grande parte não conhecem os axiomas Euclidianos.

Segundo Sousa (2004, p.4), nos cursos de licenciatura, não pensamos sobre a natureza lógico-histórica do pensamento matemático.

> Preocupamo-nos com o como ensinar e o como aprender matemática, porém, não proporcionamos momentos de reflexões, a partir de vivências e análises de atividades de ensino, pelas quais estudantes e professores possam pensar sobre as diversas concepções de mundo que interferem no nosso modo de conceber a matemática. Não falamos da vida a partir dos conteúdos matemáticos e ignoramos a vida que pulsa nos conceitos matemáticos que ensinamos (SOUSA, 2004, p.5).

Muitas vezes não mencionamos sequer o nome de Euclides, dizemos apenas geometria. Não mencionamos a contribuição de Euclides e das diversas civilizações que o precederam. Ensinamos uma geometria perfeita e não passível de questionamentos, que parece ter "caído do céu". Não apresentamos a Geometria Euclidiana como uma verdade relativa, que depende da validade dos seus axiomas. Não nos referimos à maneira como os gregos entendiam as verdades geométricas, como verdades absolutas, independentes do tempo e do ser humano e que forneceram explicações racionais para o funcionamento do universo, e como podemos pensar as verdades geométricas .

Para Brito (1995, p. 29), os gregos, ao utilizarem os conhecimentos dos antigos povos do Oriente e destacarem a linha, o ângulo e o ponto, acharam que haviam chegado a elementos imutáveis, exteriores ao tempo e, portanto, eternos. De certa maneira, esse pensamento que credita à Geometria verdades imutáveis, relacionadas com o Universo, manteve sua influência sobre os estudiosos de matemática até o séc. XIX e de certa forma ainda mantém sua influência na escola.

O conhecimento geométrico também contém história e, em grande parte das vezes, nós que fazemos o ensino ignoramos a sua história. Ao apresentarmos a Geometria Euclidiana não nos preocupamos em dizer que ela não é a única geometria existente e que existem outras geometrias tão consistentes quanto ela e que nos ajudam a tentar entender nosso mundo, nossa história e o movimento do nosso pensamento.

Segundo Kosik (2002), citado por Sousa (2004, p.6), a totalidade da realidade contém o cotidiano de nossas ações e, o cotidiano, por sua vez, tem sua própria história e alimenta a História. "Portanto, se a teoria é lógica, essa lógica tem história e, por ter história, é parte do cotidiano. Nesse sentido, a lógica do conhecimento matemático e algébrico contém história e, muitas vezes é ignorada por nós que fazemos o ensino (SOUSA, 2004, p.6)".

INDISSOCIABILIDADE ENTRE O LÓGICO E O HISTÓRICO

Pensando sobre o lógico e histórico é que teremos o movimento do pensamento. Entendemos por histórico "o processo de mudança do objeto, as etapas de seu surgimento e desenvolvimento. O histórico atua como objeto do pensamento, o reflexo do histórico, como conteúdo (KOPNIN, 1978, p.183)", e por lógico entendemos que este é o meio pelo qual o pensamento visa à reprodução do processo histórico real em toda a sua objetividade, complexidade e contrariedade (KOPNIN, 1978, p.183).

> O lógico-histórico é a interpretação lógica que o movimento do pensamento faz ao refletir sobre o acontecido. O que chamamos de acontecimento histórico não se manifestou no tempo e no espaço obedecendo estritamente à lógica do desenvolvimento que atribuímos a esses acontecimentos, ao interpretá-los à distância (MOURA, SOUSA,, p. 66, 2008).

O lógico e o histórico se relacionam, no entanto, segundo Kopnin " O histórico é primário em relação ao lógico, o lógico reflete os principais períodos da história (KOPNIN, 1978, p.184)". Ainda segundo este autor, o pensamento não deve simplesmente fotografar o processo histórico real, ele não precisa seguir cegamente o movimento do pensar. "Por isso o *lógico* é o *histórico das causalidades que o perturbam (*Kopnin, 1978, p.184)".

> O lógico é reflexo do histórico por meio de abstrações e aqui dá-se atenção principal à manutenção da linha principal do processo histórico real. A lógica do movimento do pensamento tem como uma de suas leis principais a ascensão do simples ao complexo, do inferior ao superior, e esse movimento do pensamento expressa a lei do desenvolvimento dos fenômenos do mundo objetivo (KOPNIN, 1978, p.184).

A lógica fornece a forma de desenvolvimento mais puro, mais esse não é possível em um processo histórico. No entanto ela reflete o processo histórico, por isso é necessário interpretá-la.

Para desenvolvermos um estudo sobre o desenvolvimento lógico histórico das Geometrias não-euclidianas devemos começar pelo processo histórico real de seu desenvolvimento, o que supõe que devemos conhecer a essência do objeto. Ou seja, devemos estudar o conhecimento de sua história, de seu surgimento e desenvolvimento, mas ao estudar a história das Geometrias não-euclidianas não podemos perder de vista o conhecimento da essência deste enquanto fenômeno social. É preciso partir "do pensamento simples ao complexo; do não-desenvolvido ao desenvolvido; esse movimento reflete o processo real de mudança das formas de valor, processo que se verificou na história real (KOPIN, 1978, p.185)". Para chegar ao degrau mais elevado do conhecimento é necessário recorrer à sua história, é ela que vai levar a uma profunda compreensão da essência do objeto a ser estudado.

> Deste modo, a teoria do objeto fornece a chave do estudo de sua história, ao passo que o estudo da história enriquece a teoria, corrigindo-a, completando-a e desenvolvendo-a. É como se o pensamento de desenvolvesse conforme um círculo: da teoria (ou lógica) à história e desta novamente à teoria (lógica) [...] Uma teoria mais desenvolvida permite abordar a história, de modo diferente, novo, descobrir nestes aspectos e momentos que não poderiam ser descobertos no estudo anterior. Por outro lado, um conhecimento mais rico da história levará a uma teoria mais

> desenvolvida e, deste modo, à base da inter-relação do lógico e do histórico o nosso conhecimento se aprofunda na essência do objeto e em sua história (KOPNIN,, 1978, p.186)

Comungamos da ideia de que o lógico e o histórico são indissociáveis e que isso é uma premissa necessária para a compreensão do movimento do pensamento. O lógico não apenas reflete a história das Geometrias não-euclidianas como também reflete a história do conhecimento das Geometrias não-euclidianas.

No entanto, nossa experiência como formadora de professores nos mostra que o lógico e o histórico, de modo geral, não estão presentes no ensino, o mesmo foi constatado por Sousa (2004) ao desenvolver um estudo sobre a álgebra:

> Nossa experiência enquanto formadora de professores, em cursos de licenciatura e de formação continuada mostra que o ensino de álgebra atual propicia àquele que a aprende, repetição de expressões formais sem significado e, por conseguinte, ausência da criação. Embora os licenciandos e demais professores o reconheçam como tal, denotam dificuldades em se desfazer dessa concepção (SOUSA, 2004, p.11)

No caso da geometria que é ensinada na escola, o que vemos é um uso mecanizado de fórmulas para o cálculo de áreas, perímetros e volumes, que não privilegia o entendimento da dinâmica histórica, mas apenas o uso de regras lógicas formais. O que vemos é o ensino de uma geometria que está pronta, acabada, perfeita, que se apresenta de forma imutável e não passível de nenhum questionamento.

> Como se a matemática fosse a ciências mais perfeita, não passível de erros, por isso menos humana, por ser uma das mais antigas. A matemática ainda não é. Está por vir a ser. Por consequência, a álgebra também está por vir a ser. Ainda não é. Aqui, a expressão vir a ser tem conotação de fluência, de movimento no conhecimento humano (SOUSA, 2004, p.20)

Assim, as Geometrias, em especial as Geometrias não-euclidianas, também não são, ela estão por vir a ser. Estamos inseridos em um mundo e queremos compreendê-lo e são as formas lógicas dopensamento que nos permitem dar contornos ao mundo que estamos inseridos. “A lógica das formas de pensamento é elaborada a partir de premissas ditadas pela realidade objetica em todos os tempos (Sousa, 2004, p.59)”. As formas lógicas não são a própria realidade, mas nos ajudam a construí-la.

"São construídas por todos nós, a partir do movimento do nosso próprio pensamento ao nos relacionarmos com o Universo (SOUSA, 2004, p.59)".

Segundo Davydov (citado por Sousa (2004, p. 59) o pensamento é uma atividade espiritual muito complexa em que a formação de representações sensoriais gerais, diretamente entrelaçadas com a atividade prática, cria as condições para que a atividade se desenvolva. O pensamento de um homem é o movimento das formas de atividade da sociedade historicamente constituída e apropriadas por aquele. "O pensamento teórico contém os nexos internos, o movimento lógico-histórico do objeto estudado (SOUSA, 2004, p.60)".

Para ensinar Geometrias não-euclidianas, nós, os professores devemos considerar o conceito de lógico-histórico dessas geometrias. Não podemos esquecer de levar em conta: a) a Geometria Euclidiana e o movimento do pensamento teórico a partir do desenvolvimento lógico-histórico do pensar geométrico das diversas civilizações; b) as rupturas que foram necessárias para a criação das Geometrias não-euclidianas e porque foi difícil romper com tais estruturas. É isso que precisamos levar para a sala de aula, não apenas os conteúdos e a história linear das Geometrias não-euclidianas, precisamos trabalhar em sala de aula com os percalços e com as rupturas que levaram à criação dessas novas geometrias.

O que propomos é que a Geometria Euclidiana não pode continuar a ser ensinada como algo pronto, acabado, inquestionável e imutável. É preciso que se compreenda a existência de outras geometrias, é preciso que se compreenda que a matemática não está pronta e acabada e como afirma Sousa (2004) que ela não é, ela está por vir a ser. É preciso que se ensine sobre as Geometrias não-euclidianas, mas não apenas de maneira formalizada, pela repetição de regras lógicas formais. É preciso que se considere o lógico-histórico da geometria, é preciso que se compreenda o movimento do conhecimento humano.

REFERÊNCIAS

ABBAGNANO, N. **Dicionário de Filosofia**. Tradução da 1ª edição brasileira coordenada e revista por BOSSI, A., BENEDETTI, I. C. 5º ed., São Paulo: Martins Fontes, 2007.

BRITO, A. J. **Geometrias não-euclidianas**: Um estudo histórico-pedagógico. 1995. 187 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, São Paulo, 1995.

CABARITI, E. **Geometria Hiperbólica:** uma proposta didática em ambiente informatizado. 2004. 131 f. Dissertação (Mestrado) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2004.

EUCLIDES. **Os Elimentos/Euclides**. Tradução de Irineu Bicudo. São Paulo: Unesp, 2009.

KOPNIN, P. V. **A dialética como lógica e teoria do conhecimento**. Rio de Janeiro: Civilização Brasileira, 1978.

MLODINOW, L. **A Janela de Euclides**. São Paulo: Geração Editorial, 2004.

SOUSA, M. C. **O ensino de álgebra numa perspectiva lógico-histórica:** um estudo das elaborações correlatas de professores do Ensino Fundamental. Tese (Doutorado) – Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2004.

SOUSA, M. C., MOURA, A. R. L. **Dando Movimento ao pensamento algébrico.** Revista Zetetiké, Campinas, v. 16, n. 30, p. 63-86, 2008.