INDICATIVOS DE NÚMEROS IRRACIONAIS NAS ANTIGAS CIVILIZAÇÕES: EGITO, BABILÔNIA E GRÉCIA

*Veridiana Rezende**
*Clélia Maria Ignatius Nogueira***

Resumo: O objetivo deste trabalho é apresentar parte de uma pesquisa, que se encontra em fase de desenvolvimento, sobre os números irracionais no ensino da Matemática. O presente texto refere-se aos aspectos históricos e epistemológicos dos números irracionais, focalizados, principalmente, nas matemáticas egípcia, babilônia e grega. Os resultados deste estudo apontam indícios de números irracionais nas civilizações egípcia e babilônia, contudo foram os gregos que aceitaram e difundiram estes números. No entanto, é importante salientar que uma teoria matemática consistente sobre os números irracionais foi elaborada somente em 1872 pelo matemático Richard Dedekind.
Palavras chave: Ensino de Matemática, história da matemática, números irracionais.

INDICATIVE OF IRRATIONAL NUMBERS IN ANCIENT CIVILIZATIONS: EGYPT, BABYLON AND GREECE

Abstract: The purpose of this paper is to present a part of a survey, which is under development, about irrational numbers in mathematics education. This text refers to the historical and epistemological aspects of irrational numbers, focused, mainly, on Egyptian, Babylonian and Greek mathematics. The results of this study show evidence of irrational numbers in the Egyptian and Babylonian civilizations, but the Greeks were the ones who accepted and spread these numbers. However, it is important to note that a consistent mathematical theory of irrational numbers was produced only in 1872 by the mathematician Richard Dedekind.
Keywords: Mathematics education, history of mathematics, irrational Numbers.

Apresentação

Apresenta-se neste trabalho uma pequena parte de uma pesquisa que se encontra em fase de desenvolvimento sobre os números irracionais[1] no Ensino da Matemática. Como de praxe, a primeira etapa da pesquisa consistiu em fazer um levantamento de pesquisas sobre o tema números irracionais e reais, na literatura nacional e internacional.

A segunda etapa da pesquisa consiste do estudo histórico e epistemológico sobre os números irracionais. Com esta investigação pretende-se constatar os primeiros indícios de números irracionais na antiguidade, com os povos egípcios, babilônios e gregos, até a formalização destes números que ocorreu somente em 1872, com a Teoria dos Cortes de Dedekind.

O presente artigo apresenta o início da segunda etapa da pesquisa, que consta dos primeiros indicativos de números irracionais percebidos na História da Matemática, abordando, principalmente, as matemáticas egípcia, babilônia e grega. Os resultados mostram que embora não seja possível assegurar que os egípcios e os babilônios tivessem conhecimentos sobre os números irracionais, é possível perceber em seus registros certas relações matemáticas e aproximações numéricas que apresentam vestígios dos números que atualmente são denominados por números irracionais. Contudo, foram os gregos, que após muitos conflitos, proporcionou grande avanço a estes números, por meio da Teoria das Proporções e o Método de Exaustão de Eudoxo, garantindo a existência de segmentos incomensuráveis.

A matemática no Egito e os primeiros indícios de números irracionais

Os egípcios foram os primeiros povos a "inventarem" as ciências matemáticas (CAJORI, 2007). Os registros existentes sobre suas matemáticas, que datam de aproximadamente 2000 a.C., apresentam indicativos de números irracionais. Os primeiros escritos e sistema de numeração dos egípcios foram de natureza hieroglífica[2], que datam, aproximadamente, de 5000 anos, encontrados em pedras, tumbas e monumentos do Egito. No entanto, as principais fontes de informações sobre a matemática egípcia, que resistiram ao tempo, são os papiros. Dentre estes documentos, os que se destacam pela quantidade de informações e problemas matemáticos são os papiros de Rhind (ou de Ahmes) e o de Moscou (ou de Golonishev) (BOYER, 1996).

De acordo com Boyer (1996), o papiro de Rhind apresenta diversos problemas envolvendo operações aritméticas, frações unitárias, álgebra, razões trigonométricas e geometria. Dentre estes, os problemas geométricos 50 e 48 chamam a atenção por apresentarem indícios de números irracionais. A questão 50 estabelece que a área de um campo circular cuja medida do diâmetro é nove unidades de comprimento é a mesma área de um quadrado cuja medida dos lados é oito unidades de comprimento. Interpretando este problema com notações matemáticas atuais, obtém-se:

$$\pi\left(\frac{9}{2}\right)^2 = 8\times 8 \Leftrightarrow \pi\frac{81}{4} = 64 \Leftrightarrow \pi = \ \ 3{,}1604 .$$

Trata-se de uma aproximação significativa para o número π, levando em conta a época que esta relação matemática foi estabelecida. A motivação dos egípcios ao igualarem a medida da área do círculo de diâmetro nove unidades com a medida da área do quadrado de lado oito unidades pode ter origem no problema 48, que consiste em obter um octógono a partir de um quadrado de lado nove unidades de medida. Conforme a Figura 1, o quadrado era dividido em outros nove quadrados menores, de lados medindo

$\frac{1}{3}$ de unidades de medida. Em seguida, os quatro triângulos isósceles dos cantos do quadrado maior eram retirados. Visualmente é perceptível que o octógono representado na Figura 1 se aproxima da circunferência inscrita num quadrado de lado nove unidades.

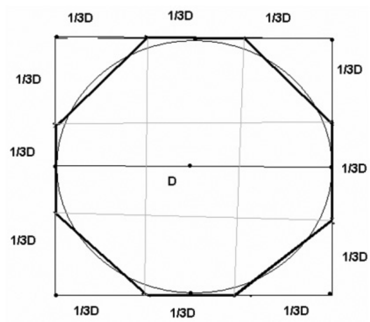

Figura 1: Octógono a partir de um quadrado

Outra relação matemática, também manipulada pelos egípcios e relacionada aos números irracionais, refere-se à regra para encontrar a medida (perímetro) da circunferência. Os registros da matemática desses povos mostram que, já naquela época, eles consideravam que a razão entre a medida da área do círculo e a medida da circunferência era igual à razão entre a medida da área do quadrado circunscrito e a medida de seu perímetro. Com notações matemáticas atuais, a razão entre a medida da área de uma circunferência de raio r e seu perímetro é $\frac{\pi r^2}{2\pi r} = \frac{r}{2}$, e a razão entre a medida de área do quadrado circunscrito numa circunferência de raio r e seu perímetro é $\frac{4r^2}{8r} = \frac{r}{2}$. Desse modo, constata-se que há aproximadamente 4000 anos os egípcios descobriram uma relação geométrica, que envolve o número irracional π, que perdura até os dias atuais.

Outro fato que desperta atenção em relação às descobertas dos povos egípcios é que a pirâmide de Quéops é uma pirâmide áurea, ou seja, suas medidas satisfazem a relação matemática $\frac{2\mathrm{h}}{a} = \sqrt{\ddot{o}} = 1{,}272...$, na qual $\ddot{o} = 1{,}618...$ é um número irracional, denominado por número de ouro. (SARAIVA, 2002).

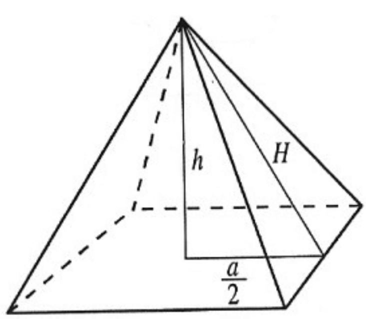

Figura 2: Pirâmide de base quadrada

As medidas reais da pirâmide de Quéops são: altura $h = 146{,}59$ m e lado da base (quadrada) $a = 230{,}3$ m. Com estas medidas e utilizando a relação de pirâmide áurea, conforme definida acima, segue que $\frac{2h}{a} = \frac{2 \times 146{,}59}{230{,}33} = 1{,}272...$, ou seja, a pirâmide de Quéops satisfaz a condição de pirâmide áurea, relacionada com o número de ouro φ. Considera-se, ao menos curioso, que um monumento que data de 2500 a.C., construído por povos da antiguidade, sem auxílio de instrumentos de medidas precisos, apresente uma relação matemática que envolva um número irracional tão particular que é o número de ouro.

A matemática babilônica e indicativos de números irracionais

Os registros existentes sobre a escrita cuneiforme e o sistema sexagesimal dos babilônios estão disponibilizados em mais de meio milhão de tabletes de argila desenterrados na Mesopotâmia, dos quais quase quatrocentos foram identificados como estritamente matemáticos. Nestes tabletes há textos matemáticos que datam de 2100 a.C. (EVES, 2004). Alguns desses textos oferecem aproximações dos números irracionais $\sqrt{2}$ e π.

Aaboe (2002) apresenta a foto de um pequeno tablete de argila da Babilônia antiga que contém um quadrado, cujo número $a = 30$ está escrito junto ao lado e os números $b = 1{,}24{,}51{,}10$ e $c = 42{,}25{,}35$ junto à diagonal.

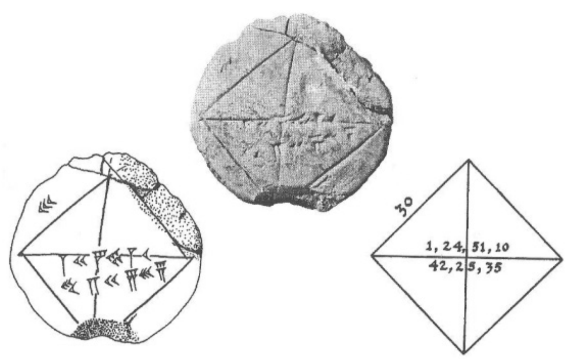

Figura 3: Tablete da Babilônia antiga
Fonte: Aaboe (2002, p. 28)

Segundo o referido autor, ao introduzir os pontos e vírgulas nos locais apropriados, obtém-se $a = ab$, pois no sistema sexagesimal multiplicar por 30 é o mesmo que dividir por 2. Por outro lado, como a é a medida do lado do quadrado e c representa a medida da diagonal do quadrado, obtém-se, pelo Teorema de Pitágoras, $c^2 = 2a^2$, ou seja, $c = \sqrt{2}a$. Sendo assim, é provável que os babilônios consideravam b uma aproximação de $\sqrt{2}$, pois o valor atribuído a b concorda com o valor de $\sqrt{2}$ com erro de apenas um milionésimo.

Além dessa aproximação para $\sqrt{2}$, os registros babilônios mostram que a diagonal do quadrado poderia ser calculada multiplicando a medida do lado do quadrado por $\sqrt{2}$ (AABOE, 2002; BOYER, 1996). Tal fato nos leva a idealizar que esses povos tinham conhecimentos, pelo menos gerais, do que hoje se denomina por Teorema de Pitágoras. Os registros desses povos garantem um alto grau de sofisticação da matemática babilônia relacionada ao Teorema de Pitágoras. O tablete Plimpton 322 apresenta quinze linhas com ternos pitagóricos, ou seja, valores de x, y e z que satisfazem $x^2, y^2 = z^2$. Segundo Aaboe (2002), não se pode negar que os povos da Mesopotâmia conheciam alguma forma do Teorema de Pitágoras.

Um dos tabletes (da coleção Yale), que data aproximadamente 1600 a.C., contém uma aproximação significativa para $\sqrt{2}$ até quatro casas sexagesimais, $1; 24, 51, 10$, ou em notações atuais,

$$1+\frac{24}{60}+\frac{51}{60^2}+\frac{10}{60^3},$$

valor que está compreendido entre $1{,}4142129$ e $1{,}4142130$. Uma precisão como esta não pode ter surgido da medição física realizada numa figura. Provavelmente, os babilônios procuravam um número cujo quadrado resultasse em 2, e dispunham de uma técnica para a realização deste cálculo. Os babilônios provavelmente utilizavam o método de Heron de Alexandria (ocasionalmente conhecido por algoritmo de Newton), que consiste em calcular os termos de uma sequência que, em notação atual, satisfaz a relação $a_{n+1}=\frac{a_n}{2}+\frac{1}{a_n}$. Considerando $a_0 = 1$, obtém-se:

$$a_1 = \frac{1}{2}+1=\frac{3}{2}=1{,}5$$

$$a_2 = \frac{3}{4}+\frac{2}{3}=\frac{17}{12}\cong 1{,}416667$$

$$a_3 = \frac{17}{24}+\frac{12}{17}=\frac{577}{408}\cong 1{,}4142157$$

$$a_4 = \frac{577}{816}+\frac{408}{577}=\frac{665857}{470832}\cong 1{,}41421$$

Este processo pode continuar indefinidamente, e os valores numéricos da sequência se aproximam cada vez mais de $\sqrt{2}$ (GODEFROY, 1997; BOYER, 1996).

Os povos babilônios também utilizaram aproximações para $\sqrt{2}$ e para $\frac{1}{\sqrt{2}}$ pelos números $\frac{17}{12}$ e $\frac{17}{24}$, respectivamente (EVES, 2004). Observa-se que apesar de serem menos precisas que as aproximações encontradas no tablete de Yale, elas também devem ser levadas em consideração, pois basta comparar a razão $\frac{17}{12}$ com o número $\sqrt{2}=1{,}41421K$ e a razão $\frac{17}{24}=0{,}79833...$ com o número irracional $\frac{1}{\sqrt{2}}=0{,}70710K$.

Além das aproximações para $\sqrt{2}$, existem registros que comprovam que os babilônios também apresentavam boa aproximação para o valor de π. De acordo com Boyer (1996), eles tomavam como a razão entre as medidas do perímetro do hexágono regular e do perímetro da circunferência circunscrita neste hexágono como $0;\ 57,\ 36$. Na notação matemática atual, esta relação é representada por $\frac{6r}{2\pi\pi} = \frac{3}{\pi} = 0{,}96$, ou seja, $\pi = 3{,}125$. Esta aproximação para π é tão boa quanto a aproximação utilizada pelos egípcios, exibida anteriormente.

Outro fato que merece destaque na matemática babilônia, que também se relaciona com números irracionais, é a generalidade para as resoluções das equações quadráticas com três termos. Por meio da linguagem verbal, eles resolviam as referidas equações pelo método que conhecemos hoje por fórmula de Bhaskara. Todavia, o número que deveria ser efetuado a raiz quadrada existente na fórmula, era sempre um número quadrado perfeito (CAJORI, 2007; BOYER, 1996), ou seja, os babilônios refutavam o cálculo de raízes que resultassem em números irracionais. Este fato leva a crer que os babilônios perceberam a existência de números irracionais.

A matemática grega e os números irracionais

Embora sejam percebidos aspectos da história grega desde 2000 a.C., foi aproximadamente em 800 a.C. que essa civilização acelerou seu desenvolvimento e "preparava-se rapidamente para assumir a hegemonia cultural" (BOYER, 1996, p. 30). Estudiosos gregos, dentre eles Tales de Mileto (624 - 548 a.C.) e Pitágoras de Samos (600 - 580 a.C.), viajaram pelo Egito e pela Babilônia absorvendo informações matemáticas, astronômicas e religiosas destes povos. Este fato provavelmente acelerou o desenvolvimento intelectual dos gregos.

Ao retornar à Grécia, Pitágoras fundou a escola pitagórica, uma sociedade secreta, mística e religiosa, que concentrava seus estudos principalmente em Matemática e Filosofia. A escola pitagórica tinha como lema e verdade absoluta de que tudo era número[3]. O símbolo da escola era o pentágono regular, que significava o símbolo da vida humana, da boa saúde, da aliança entre os homens, de protetor físico e espiritual (BOYER, 1996; MIGUEL, 1993). Devido à importância que os pitagóricos atribuíam ao pentágono regular, é possível que eles tenham atribuído atenção especial à análise desta figura geométrica. O estudo das propriedades do pentágono provavelmente contribuiu para os gregos perceberem que não existe um terceiro segmento que cabe um número inteiro de vezes no lado e na diagonal do pentágono regular, ao mesmo tempo. Logo, esse estudo pode ter acarretado a descoberta de que o lado e a diagonal do pentágono regular são segmentos incomensuráveis.

Segundo Godefroy (1997), os estudos dos gregos sobre as propriedades do pentágono regular foram tão minuciosos que há a possibilidade de os pitagóricos terem descoberto que a razão entre o lado e a diagonal do pentágono é igual ao número de ouro φ, e que a razão entre a medida do lado do pentágono regular e a medida do lado do pentágono obtido pela interseção das diagonais é φ^2. Assim, o número de ouro φ pode ter sido o primeiro número irracional percebido pelos gregos.

Provavelmente, o conhecimento da relação matemática atualmente denominada por Teorema de Pitágoras, deve-se aos contatos que os pitagóricos tiveram com os babilônios. Porém, foram os gregos que demonstraram a veracidade deste resultado. Possivelmente esta relação matemática recebe o título de Teorema de Pitágoras por decorrência desse fato.

Em conformidade com Godefroy (1997), no Menón de Platão encontra-se a seguinte demonstração, que num quadrado de lado unitário a diagonal mede $\sqrt{2}$: ao unir quatro quadrados de lados com medida unitária (Figura 4), a medida da área do quadrado formado pelas quatro diagonais será $4 \times \frac{1}{2} = 2$, sendo que $\frac{1}{2}$ representa as áreas dos triângulos retângulos isósceles de catetos unitários.

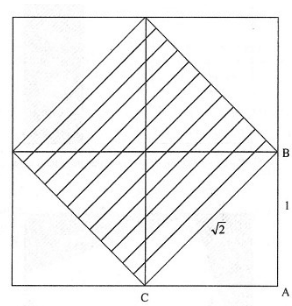

Figura 4: $\frac{BC}{AB} = \sqrt{2}$

Com esta demonstração, os pitagóricos provaram, geometricamente, a existência de um quadrado de área igual a dois, isto é, detectaram a existência de um número (medida do lado do quadrado) que elevado ao quadrado resulta em dois. Atualmente, este número é denotado por $\sqrt{2}$.

Segundo Aaboe (2002), enquanto os babilônios apresentavam boas aproximações para o número irracional $\sqrt{2}$, os gregos levaram este assunto até o fim, demonstrando de modo consistente que $\sqrt{2}$ é um número irracional. A demonstração clássica da irracionalidade de $\sqrt{2}$ apresentada pelos gregos consiste em supor, por absurdo, que existe uma fração irredutível $\frac{a}{b}$, com $a, b \in Z, b \neq 0$ de modo que a igualdade $\frac{a}{b} = \sqrt{2}$ seja verdadeira, ou seja, consiste em supor que $\sqrt{2}$ é um número racional. Da igualdade anterior, segue que:

$$\frac{a^2}{b^2} = 2 \Leftrightarrow a^2 = 2b^2.$$

Decorre desse fato que a^2 é um número par, pois é múltiplo de 2, e, portanto a também é par. Logo, existe um número $p \in Z$ tal que $a = 2p$.

Sendo assim,

$$a^2 = 2b^2 \Leftrightarrow 4p^2 = 2b^2 \Leftrightarrow 2p^2 = b^2.$$

Ou seja, b^2 é par, e, portanto, b também é par. Mas isto é uma contradição, pois a e b não podem ter divisores em comum, uma vez que, inicialmente, supôs-se que a fração $\frac{a}{b}$ é irredutível. Conclui-se, então, que a hipótese inicial que $\sqrt{2}$ é um número racional é falsa, ou seja, $\sqrt{2}$ é irracional.

Todavia, mesmo com as descobertas e demonstrações elaboradas pelos gregos sobre os números irracionais, estes números causaram muitos conflitos entre os gregos da antiguidade, de modo especial para os membros da escola pitagórica. Por exemplo, eles acreditavam que na reta enumerada estavam dispostos apenas números racionais, e que a reta era contínua, pois entre quaisquer dois números da reta sempre é possível encontrar um terceiro número entre eles (MIGUEL, 1993). Porém, segundo Eves (2004), os próprios pitagóricos perceberam que a crença deles de que a reta era formada apenas por números racionais não era verdadeira, ao constatarem que não existe um número racional que corresponda o ponto P da reta no caso em que OP tem a mesma medida que a diagonal do quadrado de lado unitário, conforme representado na Figura 5.

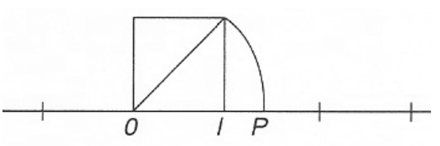

Figura 5: Diagonal de um quadrado de lados com medidas unitárias

Este fato perturbou os pitagóricos, pois o segmento OP existia, contudo nenhum número poderia corresponder à sua medida. Os membros da escola pitagórica procuraram conviver com estas contradições simplesmente aceitando o fato de que para certos segmentos não existia número que representasse sua medida, e por isto, concluíram que a geometria era muito mais ampla e rica do que a aritmética (MIGUEL, 1993).

Com a percepção dos números irracionais, a crença da escola de que tudo era representado por números (inteiros) não era mais verdadeira, e a veracidade do próprio Teorema de Pitágoras poderia ser questionada. Este escândalo foi tão grande que os pitagóricos tentaram manter essa questão em sigilo. Conta a lenda que Hipasus, um dos membros da escola pitagórica, foi lançado ao mar por revelar o segredo da escola à pessoas estranhas.

A escola de Platão, criada pouco depois da descoberta dos números irracionais, também contribuiu muito para o desenvolvimento da matemática grega, inclusive para os números irracionais. Os membros desta escola não podiam denominar estes números, mas também sabiam que não seria possível refutá-los, uma vez que não se pode negar a existência da diagonal do quadrado de lado unitário. Foi por meio do Teorema de Pitágoras e utilizando os únicos instrumentos permitidos pela escola, a régua não graduada e o compasso, que os platônicos determinaram um procedimento geométrico, denominado por espiral piatagórica (Figura 6), para encontrar $\sqrt{n}$, qualquer que seja n um número inteiro positivo (GODEFROY, 1997).

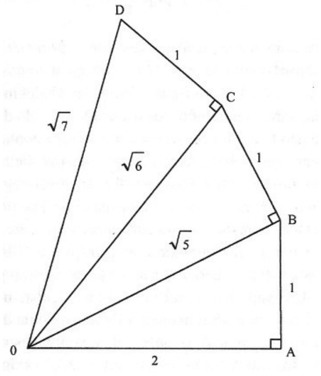

Figura 6: Medidas de $\sqrt{n}$

Apesar de os membros da escola platônica não refutarem os números irracionais, a questão da incomensurabilidade também causou escândalos e conflitos, pois parecia arruinar os teoremas envolvendo proporções. Os platônicos perceberam que a razão entre a diagonal e o lado do quadrado não era igual a razão de um número inteiro para outro número inteiro, acarretando um sério problema: descobrir como comparar grandezas incomensuráveis (BOYER, 1996). Foi Eudoxo, um dos mais notáveis membros da escola de Platão, que, por volta de 370 a.C., resolveu o problema da incomensurabilidade, elaborando sua Teoria das Proporções e o Método da Exaustão. Em sua teoria, Eudoxo apresenta uma nova definição de proporção entre grandezas: considere quatro grandezas A, B, C e D de mesma espécie (volumes, áreas, segmentos), diz-se que A está para B assim como C está para D se, para quaisquer que sejam os números inteiros positivos m e n, se tenha:

$$n\,A > mB \Leftrightarrow nC > mD;\ nA = mB \Leftrightarrow nC = mD$$
$$nA < mB; \Leftrightarrow nC < mB$$

A Teoria das Proporções e o Método da Exaustão deram origem a uma nova tradição na matemática grega, na qual os segmentos incomensuráveis passaram a ser aceitos como um objeto geométrico. As contribuições de Eudoxo foram fundamentais para o desenvolvimento da Matemática, serviram de base para quase toda a matemática apresentada nos Elementos de Euclides e contribuíram para o desenvolvimento do cálculo diferencial (LORIN, 2009).

Considerações sobre a gênese dos números irracionais

O estudo apresentado neste artigo permite constatar que a gênese dos números irracionais está na matemática dos egípcios e babilônios, em função das relações matemáticas e das boas aproximações relacionadas a estes números presentes nos registros desses povos. No entanto, foram os gregos, que após muitos conflitos, apresentaram grandes avanços e colaboraram para a difusão desses números. Mais precisamente, foi o grego Eudoxo que solucionou a questão da incomensurabilidade, ao elaborar sua teoria assegurando a existência de segmentos incomensuráveis.

Porém, apesar de a solução apresentada por Eudoxo para a incomensurabilidade ter sido aceita e aplicada pelos matemáticos durante vários séculos, a questão dos números irracionais não estava totalmente resolvida, pois ainda não existia uma definição precisa para esses números. Foi somente em 1872 que o matemático alemão Richard Dedekind fundamentado na Teoria das Proporções do grego Eudoxo, desenvolveu uma teoria matemática consistente para os números irracionais. Por meio dos chamados Cortes de Dedekind, este matemático assegurou a existência dos números irracionais, com definições, propriedades e teoremas precisos sobre esse tema, encerrando um capítulo da História da Matemática.

Notas

* Doutora em Educação Matemática no Programa de Pós-Graduação em Educação para a Ciência e a Matemática da Universidade Estadual de Maringá. Professora Adjunta do Departamento de Matemática da Universidade Estadual do Paraná, Câmpus de Campo Mourão. E-mail: rezendeveridiana@gmail.com

** Doutora em Educação pela Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho. Professora no Centro de Estudos Superiores de Maringá – CESUMAR. E-mail: voclelia@gmail.com

[1] A pesquisa que se encontra em fase de desenvolvimento envolve sujeitos franceses, por este motivo foi realizado um estudo de pesquisas, livros didáticos e documentos curriculares franceses relacionados aos números irracionais. Os números irracionais são todos os números que possuem infinitas casas decimais não periódicas.

[2] A escrita hieroglífica constitui provavelmente o mais antigo sistema organizado de escrita no mundo.

[3] Os pitagóricos consideravam apenas os números inteiros positivos.

Referências

AABOE, Asger. **Episódios da História Antiga da Matemática**. 2 ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática – SBM, 2002.

BOYER, Carl Benjamin. **História da Matemática**. São Paulo: Editora Edgard Blücher Ltda, 1996.

CAJORI, Florian. **Uma História da Matemática**. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna Ltda., 2007.

EVES, Howard. **Introdução à História da Matemática**. Campinas: Editora da UNICAMP, 2004.

GODEFROY, Gilles. **A Aventura dos Números**. Lisboa – Portugal: Instituto Piaget, 1997.

LORIN, João. Henrique. **Uma Revolução Científica na Matemática: do Paradigma Pitagórico ao Paradigma Euclidiano.** Dissertação (Mestrado) – Programa de Pós-Graduação em Educação para a Ciência e a Matemática, Centro de Ciências Exatas, UEM, Maringá, 2009.

MIGUEL, Antonio. **Três estudos sobre História e Educação Matemática.** 1993. 361 f. Tese (Doutorado) – Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 1993. Disponível em: <http://libdigi.unicamp.br/document/?code=vtls000069861>. Acesso em: 27 out. 2009.

SARAIVA, José Cloves Verde. As pirâmides do Egito e a razão áurea. **Revista do Professor de Matemática,** São Paulo, n. 48, p. 3-6, 2002.

Recebido em: abril de 2011.

Aprovado em: agosto de 2011.