



FRACTAIS: ALGUMAS CARACTERÍSTICAS E PROPRIEDADES

Regis Alessandro Fuzzo IC-Fecilcam/Fundação Araucária, Matemática, Fecilcam,

regisfuzzo@gmail.com

Me. Veridiana Rezende (OR), Fecilcam, rezendeveridiana@gmail.com

Me. Talita Secorun dos Santos (CO-OR), Fecilcam, tsecorun@hotmail.com

1. Introdução

A ideia de estudar a Geometria Fractal se deve ao fato dela ser mais precisa para descrever a natureza do que Geometria Euclidiana, já que esta Geometria Euclidiana não é capaz de descrever as formas encontradas na Natureza, como as nuvens, as montanhas, as flores, as árvores etc. Benoit Mandelbrot foi o responsável pelo desenvolvimento desta Geometria da Natureza e implementou o seu uso num diverso número de aplicações. A partir desta teoria descreveu vários dos irregulares e fragmentados modelos que encontramos em nossa volta através da família de formas que chamou fractais.

Assim fazendo uma abordagem sobre o estudo dos fractais como um saber científico, estudando as características, classificações e suas principais propriedades, nos possibilita entender como eles podem ser trabalhados como um saber escolar.

Desse modo ao introduzirmos o estudo da Geometria Fractal na sala de aula, os alunos têm, por meio dele, a oportunidade e a capacidade de investigar tópicos da Matemática Tradicional por um novo ângulo, de fazerem conexões tanto dentro da própria Matemática e o mundo da Natureza e do Homem, e de explorarem a Matemática por caminhos não-analíticos.

2. Metodologia

A fundamentação teórico-metodológica do conteúdo desenvolvido é baseada em pesquisas histórico-bibliográficas. Inicialmente, no desenvolvimento desta proposta foram realizadas pesquisas bibliográficas sobre a história das Geometrias Não-Euclidianas. Também, baseando-se em artigos e trabalhos científicos da área, foram realizadas leituras da história da Geometria Fractal, desde sua relação com a Teoria do Caos, por meio do livro *Caos – A criação de uma nova ciência* de James Gleick, até Benoit Mandelbrot considerado o pai dos fractais e o primeiro a utilizar o termo fractal em 1967. A partir disso, fizeram-se estudos sobre a definição, classificação, características e propriedades dos fractais, bem como a construção de alguns fractais conhecidos.

3. Desenvolvimento

Dentre muitos trabalhos publicados por Mandelbrot em relação aos fractais, encontramos uma definição dada por Mandelbrot em Barbosa (2005, p.18): “Um fractal é uma forma cujas partes se assemelham ao seu todo sob alguns aspectos.”

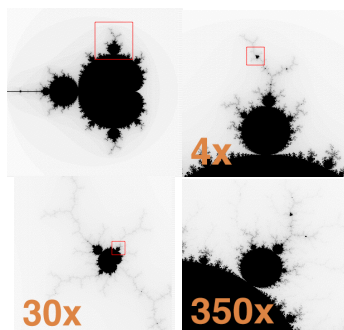


Figura 1: Imagens de um fractal ampliado
Wikipedia (2008)

3.1. Características

Também, encontramos em Murr *et al.* (2003) a definição dada por K. J. Falconer para considerar uma dada construção como Fractal se possui todas, ou a maioria, das seguintes características:

- ✓ Estrutura fina em qualquer escala;

A estrutura fina consiste em detalhamento infinito. Sucessivas ampliações de um fractal levam a mais e mais detalhes, indefinidamente. Isso não ocorre com as figuras geométricas convencionais, como a circunferência: se ampliarmos suficientemente um pequeno arco da mesma e dele retirarmos um pequeno arco que também ampliaremos, e repetindo sucessivamente o processo, obteremos um arco virtualmente retilíneo. Uma reta se caracteriza por não possuir detalhes. Nos fractais, isso não ocorre. A cada ampliação surgem mais detalhes, mesmo que se repita o processo indefinidamente. Se o fractal for construído na tela gráfica de um computador, os detalhes aparecerão nas ampliações sucessivas, até onde o computador suportar a realização dessas ampliações.

- ✓ Não pode ser descrita de maneira simples por uma função analítica ou em linguagem geométrica tradicional;
- ✓ Isso se deve ao fato de que o fractal é construído através de processos iterativos. É impossível representá-lo por uma função simples.
- ✓ Possui alguma espécie de auto-similaridade ou auto-afinidade, mesmo que estocasticamente;



A auto-similaridade, também chamada por Mandelbrot de homotetia interna, consiste em se poderem obter réplicas menores da figura através de sua divisão (ou no caso dos fractais, de sua ampliação). Quando as réplicas são sempre idênticas e obtidas através do mesmo fator de redução, diz-se que a figura possui auto-similaridade estrita. Algumas figuras geométricas tradicionais, como um quadrado, por exemplo, também possuem essa característica. É possível dividir um quadrado em certo número de réplicas menores dele mesmo. Já na auto-afinidade, não há mais réplicas, e sim figuras obtidas através de transformações afins, isto é, figuras afins.

- ✓ Sua dimensão Fractal, definida de alguma forma, é estritamente maior que a sua dimensão topológica;

A dimensão Fractal diz respeito à dimensão espacial, ou seja, ao espaço que a figura ocupa. Pode ser calculada de várias formas. Se a figura não possuir auto-similaridade, um método gráfico correntemente utilizado é o de contagem de caixas. Se possuir, como é o caso do conjunto de Cantor, podemos calcular a dimensão por outro método um pouco mais simples, como faremos mais adiante.

- ✓ Em muitos casos tem uma lei de formação simples.

A lei de formação do fractal é o processo que é repetido a cada iteração. De fato, geralmente esse procedimento a ser repetido é bastante simples. No caso do conjunto de Cantor, a lei de formação é: dividem-se cada segmento em 3 partes, e retira-se o terço médio.

3.2. Classificação

Conforme a definição de Fractal encontrada na enciclopédia virtual Wikipédia (2008), os fractais podem ser classificados em três categorias principais. Estas categorias podem ser determinadas pelo modo como o fractal é formado ou gerado. São elas:

- ✓ Sistema de funções iteradas: Os fractais determinísticos, também conhecidos como fractais geométricos, são subconjuntos gerados por transformações geométricas simples do próprio objeto nele mesmo, possuem uma regra fixa de substituição geométrica, aplicadas a cada iteração como, por exemplo, a curva de Peano, o floco de neve de Koch e a esponja de Menger.

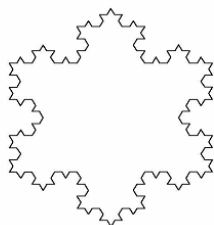


Figura 2: Floco de Neve no nível 4
Murr *et al.* (2008)

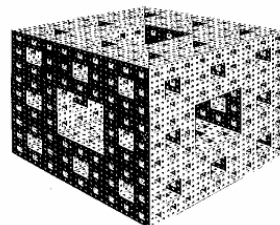


Figura 3: Esponja de Menger
Assis *et al.* (2008)

- ✓ Fractais gerados por computadores: Também são chamados de fractais de fuga, um exemplo desse tipo é o conjunto de Mandelbrot, um dos fractais mais conhecidos, uma figura tão complexa que seria impossível conhecê-la ao longo de uma vida inteira.

Exemplo: matematicamente, o conjunto de Mandelbrot, é o conjunto dos parâmetros c para os quais a "órbita" do ponto 0 por f_c (isto é, o conjunto das iteradas $\{f_c(0), f_c \circ f_c(0), \dots\}$) é limitado, onde f_c é a função: $f_c: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}; Z_{n+1} \mapsto Z_n^2 + c; Z_0 = 0$ e $c = a + b.i$

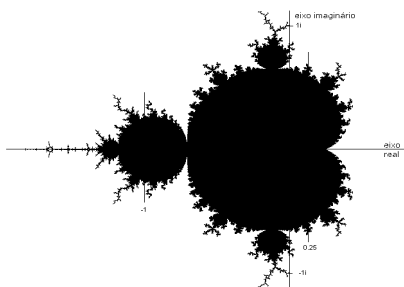


Figura 4: Conjunto de Mandelbrot
Wikipedia (2008)

- ✓ Fractais aleatórios: São também chamados de fractais naturais, quando o todo é estatisticamente semelhante a uma ampliação de uma parte dizemos que o fractal é aleatório.



Figura 5: Brócolis
Maia (2008)



Figura 6: Carvalho
Maia (2008)

Os Fractais podem também ser classificados de acordo com sua auto-similaridade. Existem três tipos de auto-similaridade. Ainda conforme definição de Fractal encontrada na

enciclopédia virtual Wikipédia (2008), nos apresenta os seguintes tipos de auto-similaridade nos fractais.

- ✓ Auto-similaridade exata: É a forma em que a auto-similaridade é mais marcante, evidente, o fractal é idêntico em diferentes escalas. Fractais gerados por sistemas de funções iterativas geralmente apresentam auto-similaridade exata.
- ✓ Quase auto-similaridade: É uma forma mais solta de auto-similaridade. O fractal apresenta ser aproximadamente, mas não exatamente idêntico em escalas diferentes. Fractais gerados por computadores são geralmente quase auto-similares, mas não exatamente auto-similares.
- ✓ Auto-similaridade estatística: É a forma menos evidente de auto-similaridade. O fractal possui medidas numéricas ou estatísticas que são preservadas em diferentes escalas. As definições de fractais geralmente implicam em alguma forma de auto-similaridade estatística. Fractais aleatórios são exemplos de fractais que possuem auto-similaridade estatística, mas não são exatamente, nem quase auto-similares.

Porém, “[...] nem todos os objetos auto-similares são fractais. Uma linha Euclidiana, por exemplo, é exatamente auto-similar, mas o argumento de que objetos Euclidianos são fractais é defendido por poucos” (FERNANDES, 2007, p.19).

3.3. Propriedades

As principais propriedades que caracterizam os fractais de acordo com Carreira (2008):

- ✓ A auto-semelhança: é a simetria através das escalas. Consiste em cada pequena porção do fractal poder ser vista como uma réplica de todo o fractal numa escala menor. Esta propriedade pode ser vista, por exemplo, na couve-flor.
- ✓ A complexidade infinita: prende-se com o fato de o processo gerador dos fractais serem recursivo, tendo um número infinito de iterações.
- ✓ A dimensão dos fractais: ao contrário do que sucede na geometria euclidiana, não é necessariamente uma quantidade inteira. Com efeito, ela é uma quantidade fracionária. A dimensão de um fractal representa o grau de ocupação deste no espaço, que tem a ver com o seu grau de irregularidade.

3.4. Dimensão Fractal

Tendo em vista a importância dada pelos autores Benoit Mandelbrot e Falconer em relação à dimensão ao se tentar definir, ou mesmo ao se caracterizar os fractais, será

abordado conceito de dimensão fractal e algumas formas de calcular o seu valor, por meio dos trabalhos de Murr *et al.* (2003).

3.4.1. Dimensão espacial e dimensão topológica

Em primeiro lugar, é preciso esclarecer que, ao falarmos em dimensão Fractal, não estamos nos referindo á dimensão euclidiana, a qual se denomina usualmente dimensão topológica. Diz-se que dois espaços topológicos têm a mesma dimensão se, entre os pontos de um e de outro, existir uma correspondência contínua e unívoca. Pela definição de Euclides, em seu livro “Os Elementos”, um ponto tem dimensão 0, uma curva dimensão 1, uma superfície dimensão 2 e uma porção de espaço, dimensão 3. Para determinar a dimensão topológica de um objeto, recorre-se ao estabelecimento de uma correspondência unívoca desse objeto com um desses entes geométricos fundamentais. Diferentemente, o termo dimensão Fractal, criado por Mandelbrot, refere-se à dimensão espacial.

Para Siqueira (2009) é necessário a criação de um novo conceito de dimensão para explicar a geometria das formas intrincadas e propõe a seguinte exemplificação:

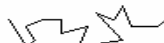
Dimensão Euclidiana		Dimensão Fractal	
.	(ponto) 0	-----	0.4
—	1		1.4
	2		1.8
	3		2.6

Figura 8: Comparação entre Dimensão Euclidiana e Fractal
Siqueira (2009)

Segundo Murr *et al.* (2003), ela nos diz que Mandelbrot e também outros autores, propõe o cálculo da dimensão Fractal de um conjunto por meio dos métodos a seguir, entre outros: Dimensão de Homotetia ou de Auto-similaridade; Dimensão de Contagem de Caixas ou de Cobertura.

Ao utilizarmos esses métodos para o cálculo da dimensão, estamos expressando algo diferente da dimensão topológica. Os métodos que envolvem o conceito de dimensão espacial referem-se ao espaço ocupado, ou preenchido, por uma figura. E tais métodos permitem que, ao se calcular efetivamente a dimensão de alguns objetos, o resultado seja um número fracionário. Nem sempre a dimensão espacial dos fractais é fracionária, porém dimensão fracionária é uma característica que as figuras tradicionais não possuem (MURR *et al.*, 2003, p.12).

Para efeito de simplicidade será apresentado apenas o método de Dimensão de Homotetia ou de Auto-similaridade.

3.4.2. Dimensão de Homotetia ou de Auto-similaridade

A seguir é apresentado como calcular a dimensão fractal pelo método de Homotetia ou de Auto-similaridade, conforme encontramos em Murr *et al.* (2003).

Homotetia interna, ou auto-similaridade estrita, como se viu anteriormente, é uma propriedade que encontramos em certas figuras geométricas tradicionais, como um quadrado por exemplo, e também em alguns fractais, como o conjunto de Cantor. Consiste em obter réplicas menores da figura, quando de sua divisão ou ampliação.

Tem-se um segmento de reta, podemos dividi-lo em p partes iguais, semelhantes ao segmento original, porém reduzidas, em uma certa razão r . O número n de segmentos obtidos relaciona-se com a razão de semelhança r da seguinte forma: $n = 1/r$. Tomemos agora um quadrado e façamos uma divisão de cada um de seus lados em p partes iguais. Obteremos p^2 quadrados semelhantes ao original, logo $p^2 = n$. Relacionando r e n , temos: $n = 1/r^2$. Da mesma maneira, vemos um cubo cujos lados foram divididos em 2 partes iguais, o que gerou 8 cubos iguais. A razão de semelhança é $1/2$. Logo, podemos concluir que $n = 1/r^3$.

Considerando que a dimensão espacial das figuras tradicionais é igual à sua dimensão topológica, e que um segmento de reta tem dimensão 1, um quadrado dimensão 2 e um cubo dimensão 3, é razoável afirmar que $n = 1/r^D$, em que D é a dimensão espacial, r é a razão de semelhança e n o número de réplicas da figura, obtidas por meio da sua divisão em p partes iguais. Como queremos calcular a dimensão D , aplica-se a função logarítmica a ambos os membros da igualdade, a fim de obter uma expressão para D : $D = -\ln(n) / \ln(r)$.

3.5. Conjunto de Cantor

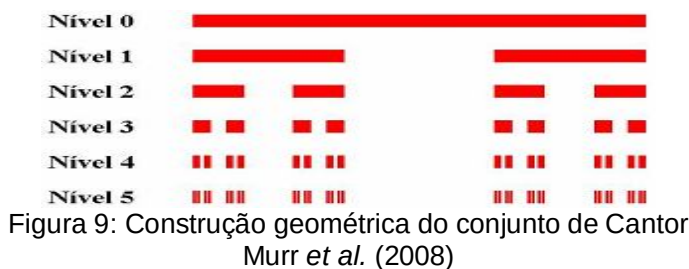
George F. L. Philipp Cantor (1845 – 1918) foi um matemático russo de origem alemã, conhecido por ter elaborado a moderna teoria dos conjuntos. Cantor apresentou em 1883 o conjunto que pode ser considerado como uma das mais antigas construções denominadas patológicas encontradas na Matemática e que hoje leva o seu nome - conjunto de Cantor.

Em Murr *et al.* (2003) encontramos uma explicação para a construção numérica e também a construção geométrica para o Conjunto de Cantor.

Segundo a autora, o conjunto de Cantor, podendo ser denotado por K , é um subconjunto fechado do intervalo $[0, 1] \subset \mathbb{R}$, obtido como complementar de uma reunião de intervalos abertos. Para construí-lo, inicia-se com o intervalo $[0, 1]$ e divide-se esse intervalo em 3 partes iguais. Em seguida, retira-se o intervalo $(1/3 ; 2/3)$ ficando com $[0 ; 1/3] \cup [2/3 ; 1]$. Note que os pontos extremos, $1/3 ; 2/3$, permanecem no conjunto que esta sendo construído.

Este foi o primeiro nível, ou etapa, da construção de K . No segundo nível, novamente divide-se cada um dos intervalos restantes em 3 partes iguais e, em seguida, retiram-se, sem os extremos dos intervalos, os respectivos terços médios. Foram retirados então $(1/9 ; 2/9)$ e $(7/9 ; 8/9)$. Ficando, no segundo nível ou etapa, com o seguinte conjunto: $[0 ; 1/9] \cup [2/9 ; 1/3] \cup [2/3 ; 7/9] \cup [8/9 ; 1]$. Em seguida, é novamente retirado o terço médio de cada um desses intervalos que constituem o conjunto obtido no segundo nível. E assim sucessivamente.

A construção Geométrica do conjunto de Cantor recebe por vezes o nome de “Poeira de Cantor”. O processo é análogo ao da construção numérica. A diferença está em iniciar com um segmento de reta de comprimento unitário, e não com um intervalo numérico. Divide-se este segmento em 3 partes iguais e retiramos o seu terço médio. Essa é a primeira etapa, ou primeiro nível, da construção. Na segunda etapa, retiramos o terço médio de cada um dos segmentos restantes. E assim sucessivamente. Nota-se que, a cada nível, ficamos com 2 segmentos, que serão novamente triseccionados. Logo, $n = 2$. A razão de semelhança desses segmentos com o segmento original é $1/3$. Logo, $r = 1/3$. Portanto, a dimensão Fractal do conjunto de Cantor é dada por: $D = -\ln(2) / \ln(1/3) \approx 0,63$



3.6. Curva de Koch

Niels Fabian Helge von Koch (1870 - 1924) foi um matemático sueco, nascido em Estocolmo, que deu seu nome ao famoso fractal conhecido como o "floco de neve Koch", que foi um dos primeiros fractais de curvas a ser descrito.



A partir de um segmento, divida-o em três partes iguais e retire-se o terço médio e o substitua por um triângulo equilátero sem a sua base. Com isso teremos quatro novos segmentos com o comprimento de um terço do original. Repete-se esse mesmo procedimento, novamente, agora com os quatro segmentos restantes. Assim, com um processo infinito, vai surgindo a curva de Koch, conforme a figura abaixo.

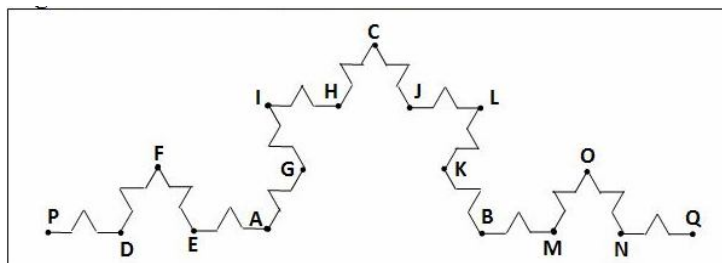


Figura 10: Nível 3 da Curva de Koch

A curva de Koch tem dimensão fractal $D \approx 1,2618$. Segundo Murr *et al.* (2003) isso significa que apesar da curva de Koch não ocupar toda a porção do plano que a contém, é necessário mais que uma simples curva (que usualmente tem dimensão 1) para contê-la.

Esta curva possui as principais características fractais, como:

- ✓ Auto-semelhança: é possível encontrar em cada nível da curva de Koch quatro cópias da figura no nível anterior, em tamanho reduzido, sendo que, para cada uma dessas quatro partes ocorre o mesmo. Deste modo vemos que a auto-semelhança é encontrada em cada parte da figura não importando qual está sendo observada.
- ✓ Estrutura fina: não importa o quanto ampliamos a curva de Koch, a quantidade de detalhes que vemos continua sendo grande.
- ✓ Fácil construção: como visto acima, o processo de obtenção da curva é simples com apenas três passos repetidos indefinidamente.
- ✓ Difícil descrição matemática: apesar da facilidade da construção, não existe uma função analítica simples que descreva a curva de Koch.

3.7. Triângulo de Sierpinski

Barbosa (2005) nos diz que Sierpinski apresentou, em 1916, um dos monstros matemáticos famosos, a curva de Sierpinski ou triângulo de Sierpinski.

Pallesi (2007) diz que para a construção do triângulo de Sierpinski existem diferentes processos. A mais comum é a construção por remoção de triângulos, utilizando um triângulo equilátero como figura inicial. O processo de construção do triângulo de Sierpinski por remoção de triângulos segue estes passos, conforme Pallesi (2007):



- ✓ Parte-se de uma superfície delimitada por um triângulo equilátero totalmente preenchido no plano, sobre o qual aplicamos sistemas repetitivos de operações.
- ✓ Marcam-se os pontos médios de cada um dos três segmentos que se delimitam o triângulo obtendo-se um novo triângulo central de vértices nos pontos médios do triângulo maior;
- ✓ Ligam-se esses três pontos médios e obtemos quatro triângulos congruentes, cujo lado é a metade do lado do triângulo original e a área é 1/4 da área deste triângulo;
- ✓ Retira-se o triângulo central, ficando 3 novos triângulos equiláteros;
- ✓ Repetem-se indefinidamente os três últimos passos com os triângulos restantes.

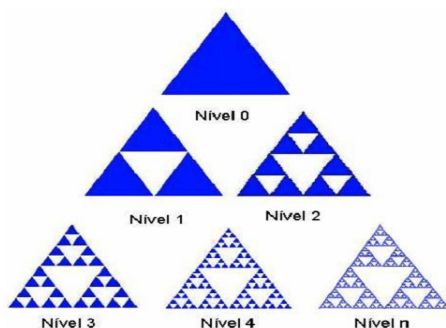


Figura 11: Níveis do Triângulo de Sierpinski
Pallesi (2007)

Segundo Murr *et al.* (2003) a dimensão fractal ou espacial do triângulo de Sierpinski, que por ter auto-similaridade estrita, pode ser calculada pela fórmula. $D = - \ln(n) / \ln(r)$. Neste caso, $n = 3$ pois o número de triângulos é triplicado de um nível para outro e o fator de semelhança entre esses triângulos é $r = 1/2$, pois o comprimento do lado de cada triângulo é reduzido em cada nível à metade. Temos, então, $D \approx 1,585$ o que significa, conforme Murr *et al.* (2003), que o triângulo de Sierpinski ocupa mais espaço que uma curva e menos espaço que uma figura bidimensional convencional, como um triângulo cheio. Por outro lado, o triângulo de Sierpinski é uma curva, portanto tem dimensão topológica 1, estritamente menor que sua dimensão espacial, o que o caracteriza como um fractal.

3.8. Esponja de Menger

A construção da Esponja de Menger sendo o inventor, o austríaco Karl Menger (1902-1985), também é baseada no mesmo princípio utilizado para a construção do Triângulo de Sierpinski. Contudo, o processo iterativo é feito com um cubo, estendendo-se portanto a uma situação tri-dimensional.



Figura 12: Níveis da esponja de Menger

Segundo Assis *et al.* (2008) o processo de construção se dá de tal forma que, para o nível 1, $N = 0$, tem-se um cubo maciço de lado l e com volume $V_0 = l^3$. Para o nível 2, $N = 1$, o cubo é dividido em 27 cubos menores e iguais, cada um com uma aresta igual a $l/3$. Remove-se o cubo central, bem como os seis cubos situados no meio de cada face do cubo maior. Este processo é repetido sequencialmente com todos os cubos restantes, dividindo cada um em 27 outros com $1/3$ da aresta do cubo imediatamente anterior. Similarmente, remove-se o cubo central e cada cubo na porção central das faces. No terceiro nível, ou seja, $N = 2$, cada um dos 20 cubos restantes são divididos em mais 27 cubos iguais, dos quais 7 são retirados, cada um com volume $(l/9)^3$.

Assis *et al.* (2008) conclui que a Esponja de Menger possui volume nulo e uma área infinita na medida em que o número de níveis tende a infinito. Neste caso o cálculo da dimensão fractal, pelo mesmo método usado anteriormente: $D = -\ln(n) / \ln(r)$. Neste caso, segue que, $n = 20$ pois o número cubos aumenta 20 vezes de um nível para outro e o fator de semelhança entre esses cubos é $r = 1/3$, pois o comprimento da aresta de cada cubo é reduzido em cada nível à um terço. Temos então $D \approx 2,7268$.

4. Considerações Finais

A Geometria Euclidiana se propõe a estudar formas regulares que quase sempre são feitas pelo homem, já a Geometria Fractal estuda padrões regulares e organizados dentro de uma aparente irregularidade, muito encontradas na natureza. Num universo despovoado de formas geométricas perfeitas, onde proliferam superfícies irregulares, difíceis de representar e medir, a Geometria Fractal apresenta-se como um meio de tratar aqueles fenômenos até agora considerados imprevisíveis, aleatórios e anômalos, ou seja, caóticos. Os Fenômenos Caóticos, bem como a Geometria Fractal, têm sido, nos últimos anos, alvo das investigações de muitos cientistas em todo o mundo. As técnicas fractais em particular, mais do que um ramo da Matemática, têm-se revelado uma ferramenta extremamente útil à



muitas Ciências, mesmo as Sociais, permitindo uma linguagem comum entre especialistas de diferentes áreas.

Quando a Geometria Fractal é levada para sala de aula, Barbosa (2005) nos diz que a Geometria Fractal auxilia tanto a compreensão de fenômenos que nos ocorrem diversos ambientes como mostra a existência de belos fractais, o que leva a descoberta do senso artístico aplicado à construção dos mesmos, juntamente com a percepção e a observação da ordem diante da desordem, causando surpresa.

Portanto, este trabalho pode ser de grande auxílio para estudantes de matemática, bem como professores da rede básica, além de todos os leitores interessados neste assunto, de forma a contribuir no seu conhecimento sobre fractais.

5. Referências

ASSIS, T. A. et al. **Geometria fractal**: propriedades e características de fractais ideais. Revista Brasileira de Ensino de Física, v. 30, n. 2, 2304. 2008.

BARBOSA, R. M. **Descobrimdo a geometria fractal** - para a sala de aula. 2. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2005.

BRITO, A. J. **Geometrias Não-Euclidianas**: Um estudo histórico-pedagógico. 1995. 187 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, São Paulo, 1995.

CARREIRA, A. S. N. et. al. **Fractais**. Disponível em: <<http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm2000/icm24/principal.htm>> Acesso em 05 junho 2008

FERNANDES, J. A. **Fractais**: Uma nova visão da Matemática. 2007. 46 f. Trabalho de conclusão de Curso – Centro Universitário de Lavras, Lavras, 2007.

GLEICK, J. **Caos**: a criação de uma nova ciência. Tradução de Waltensir Dutra. Rio de Janeiro: Campus, 1989.

MAIA, M. C. **Os fractais na vida real**. Disponível em <<http://arquitetandosonhos.blogspot.com/2008/11/os-fractais-na-natureza.html>>. Acesso em 02 dez 2008

MESQUITA, A; MOTA. M. G. **Fractais**: A linguagem do caos. In. Anais do Clube Militar Naval, 1., 1991. Clube Militar Naval, 1991

MURR, C. et al. **Fractais**: propriedades e construção. Disponível em <gauss.mat.ufpr.br/~karas/geralic2003.pdf>. Acesso em: ago. 2008.

PALLESSI, D. M. **Motivação do estudo de progressões aritméticas e geométricas através da geometria fractal**. 2007. 57 f. Monografia (Especialização) – Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2007.

SÁ, P. F; LUZ, J. L. S. **Geometria Fractal?! Traços**, Belém, v. 6, n. 11, p. 81-94, ago, 2003.



SIQUEIRA, R. **Introdução aos fractais**. Disponível em:< <http://www.insite.com.br/fractarte/artigos.php>> Acesso em 10 jan. 2009.

WIKIPÉDIA. Wikipédia Enciclopédia Livre. **Fractal**. Disponível em:<[http://pt.wikipedia.org/wiki/ Geometria_dos_fractais](http://pt.wikipedia.org/wiki/Geometria_dos_fractais)>. Acesso em 02 jul 2008.